

Sensibilidade de preço de instrumentos de renda fixa pós-fixados

Área temática: Finanças

AUTORES

EDUARDO VIEIRA DOS SANTOS PAIVA

FEA - Administração

eduardo.paiva@uol.com.br

JOSÉ ROBERTO FERREIRA SAVOIA

Universidade de São Paulo

jrsavoia@usp.br

Resumo

O presente trabalho desenvolve, a partir da metodologia de *duration*-convexidade para instrumentos de renda fixa, uma análise de sensibilidade de preços para operações de renda fixa pós-fixadas. Aplicou-se a análise a instrumentos pós-fixados do tipo indexador + *spread* e a instrumentos indexados pelo DI e um percentual. Para este indexador, são considerados como fator de risco tanto a taxa de juros quanto o percentual do DI, não tratados em estudos anteriores. No caso do cálculo com base na composição do *spread* com o indexador, a análise segue os moldes tradicionais, considerando-se o *spread* como uma taxa prefixada, porém referenciado no indexador. Em relação ao percentual do DI, foi mostrado que a *duration* modificada do fator taxa de juros depende do percentual do DI praticado pelo mercado, sendo negativa quando este for menor que o contratual. Este fato também se reflete na análise da convexidade. Este fato acarreta também convexidade invertida. O fator de risco percentual do DI apresentou um comportamento esperado em relação à análise *duration*-convexidade. Finalmente, a análise da convexidade mostrou que a combinação dos dois fatores de risco pode inverter a convexidade.

Palavras-chave: *duration*, percentual do DI, pós-fixado

Abstract

This paper develops an analysis of sensitivity of prices for post-fixed operations of fixed income, using the duration-convexity approach for fixed income instruments. It was applied to indexed instruments. Two calculation methodologies were considered: composition of index and spread, and percentage of DI. In this case, the percentage of DI is considered as risk factor together with the interest rate. When calculated using the composition of spread and index, the analysis follows as usual, considering the spread as fixed rate, referenced in the index. In relation to the percentage of the DI, it was shown that the modified duration of the risk factor interest rate depends on the percentage of DI traded in the market, being negative when it is smaller than the contractual one. This fact also causes inverted convexity. The risk factor percentage of DI presented a usual and expected behavior in relation to the duration-convexity analysis. Finally, the analysis of the convexity showed that the combination of the two factors of risk can invert the convexity.

Key words: *duration*, percentage of DI, indexed bond

Sensibilidade de preço de instrumentos de renda fixa pós-fixados
Área temática: Finanças

1. Introdução

De acordo com a Anbid – Associação Nacional dos Bancos de Investimento, do total de R\$ 1.020 bilhões de patrimônio dos fundos de investimento em maio de 2007, 19% representavam aplicações em fundos referenciados DI e em fundos de curto prazo, também referenciados em DI ou Selic (ANBID, 2007). Esse volume de aplicações em taxas de referência diária pode chegar a 30% se considerarmos as parcelas de outros fundos. A Cetip – Central de Títulos Privados, mantinha em custódia, ao final de maio de 2007, um total de R\$ 1.607 bilhões de ativos custodiados, sendo que R\$ 898 bilhões correspondiam a títulos e valores mobiliários (CETIP, 2007). Observando-se a Tabela 1, denota-se a importância dos instrumentos normalmente indexados ao DI, como o CDB e, do total de debêntures, 91% eram vinculadas ao DI (SND, 2007).

Tabela 1 – Estoque dos TVMs na Cetip em 31/05/2007

Instrumento	Valor (R\$ bilhões)	Participação (%)
CDB - Certificado de Depósito	366,5	40,8
DI - Depósito Interfinanceiro	292,4	32,6
Debêntures	164,9	18,4
outros	74,3	8,3
Total	898,1	

fonte: Cetip (2007)

Os dados acima mostram a importância do entendimento do comportamento dos preços dos títulos pós-fixados, de maneira geral, e, particularmente, dos indexados ao DI. Ohanian (2005) apresentou um estudo referente à precificação e *hedge* dinâmico de operações indexadas ao percentual do CDI usando o contrato DI futuro da BM&F – Bolsa de Mercadorias e Futuros. O trabalho analisa o impacto das oscilações nas taxas de juros sobre o valor de mercado destas operações. O autor demonstra que “[...] essa sensibilidade varia em função de parâmetros como o percentual do CDI negociado e o prazo da operação.” Ao incluir o *hedge* com taxa prefixada, a análise conclui que “[...] em determinadas condições, a carteira resultante da combinação do percentual do DI com o DI Futuro cria uma exposição gama-negativa às oscilações da taxa de juros, exigindo que o *hedge* seja periodicamente rebalanceado”.

O propósito deste trabalho, de cunho conceitual, é desenvolver, a partir da metodologia de *duration-convexidade* para instrumentos de renda fixa, uma análise de sensibilidade de preços para operações de renda fixa pós-fixadas. Inicia-se com uma breve recapitulação da metodologia, seguindo-se de sua aplicação a instrumentos pós-fixados do tipo indexador composto com *spread*. Aplica-se então a análise a instrumentos indexados pelo DI e um percentual. No caso deste indexador, são considerados como fator de risco tanto a taxa de juros quanto o percentual do DI, não considerado em estudos anteriores. Importante ressaltar que, na crise da marcação a mercado dos fundos de investimento brasileiros, em 2002, o fator percentual do DI foi significativo na determinação dos resultados negativos.

2. Duration e Convexidade

O preço de um título de renda fixa é obtido a partir do desconto de seus fluxos de caixa

futuros por uma taxa que reflita o risco do instrumento (em geral, mercado, crédito e liquidez).

Assim, de acordo com Fabozzi (2000),

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{F_t}{(1+y)^t} \quad (1)$$

em que: P : preço do título (em moeda);
 F_t : valor (em moeda) dos fluxos periódicos, compostos pelo pagamento do cupom (em geral, é constante) e do valor ao par (em geral, no vencimento);
 y : taxa de juros pelo período (*yield-to-maturity*);
 t : número de períodos;
 N : maturidade do título.

Inicialmente proposto por Macaulay (1938, apud FABOZZI; MODIGLIANI, 1992) como uma medida de prazo médio de um título, a *duration* (dur) pode ser definida como o prazo médio ponderado pelo valor presente dos fluxos futuros, determinada por:

$$dur = \frac{1}{P} * \sum_{t=1}^N \left(t * \frac{F_t}{(1+y)^t} \right) \quad (2)$$

Calculando-se a derivada do preço em relação à taxa de juros na equação 1 obtém-se, após algumas transformações algébricas¹,

$$\frac{dP}{dy} = -P_0 * \frac{1}{(1+y_0)} * \frac{1}{P_0} * \sum_{t=1}^N \left(t * \frac{F_t}{(1+y_0)^t} \right) \quad (3.1)$$

que é equivalente a

$$\frac{dP}{dy} = -P_0 * \frac{1}{(1+y_0)} * dur \quad (3.2)$$

Reescrevendo em sua forma diferencial obtemos

$$\Delta P = -P_0 * \frac{1}{(1+y_0)} * dur * \Delta y \quad (4)$$

Assim, *duration* é uma medida de sensibilidade de primeira ordem do preço de um ativo em relação à taxa de juros (FERREIRA, 2004). O termo $dur/(1+y_0)$ também é conhecido por *duration* modificada (ou *modified duration*), e obtém-se a variação percentual do preço do título:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = -mdur * \Delta y \quad (5)$$

Outra transformação comum é o conceito de *dollar-duration* ($\$dur$), obtido a partir do produto $P_0 * mdur$, obtendo-se:

$$\Delta P = -\$dur * \Delta y \quad (6)$$

Quando se fixa a variação da taxa em um *basis-point* (0,01%) obtém-se um indicador de

¹ O subscrito 0 refere-se ao valor no ponto em que foi calculada a derivada.

resultado por conta da variação da taxa neste montante. É denominado no mercado de PVO1, ou VO1, *present value of 1 basis point* ou *value of 1 basis point* e é muito utilizado na gestão de risco de carteiras de renda fixa.

Haugen (1997) alerta para as limitações da *duration*, que pode ser aplicada com confiabilidade apenas a pequenas variações nas taxas de juros e tem como premissas que a estrutura de taxas é plana e que os deslocamentos na curva de juros são paralelos. Estes problemas podem ser minimizados com a utilização da aproximação por séries de Taylor, com a introdução do efeito de segunda ordem:

$$\Delta P = \frac{dP}{dy} * \Delta y + \frac{1}{2} * \frac{d^2 P}{dy^2} \quad (7)$$

Derivando-se a equação 3.1, obtemos, após algumas transformações algébricas (SECURATO, 2003),

$$\frac{\Delta P}{P_0} = -mdur * \Delta y + \frac{1}{2} * Cx * \Delta y^2 \quad (8)$$

em que

$$Cx = \frac{1}{P_0} * \frac{1}{(1 + y_0)^2} * \sum_{t=1}^N \left(t * (t+1) * \frac{F_t}{(1 + y_0)^t} \right) \quad (9)$$

O coeficiente do termo de segunda ordem é a Convexidade. Segundo Fabozzi e Modigliani (1992), mede a taxa de variação da *duration* em relação à taxa de juros. Isto por que o efeito da variação da taxa de juros sobre o preço de um título de renda fixa não é linear, necessitando da correção de segunda ordem. Trata-se de um efeito positivo, independente do sinal da mudança da taxa de juros, sendo benéfico para as posições ativas. Apesar de se tratar de uma correção que permite a utilização em variações maiores das taxas de juros, permanecem os pressupostos de curva de juros plana e de movimentos paralelos. Assim, qualquer análise com base na metodologia *duration-convexidade* está sujeita a essa limitação, não perdendo, no entanto, sua utilidade.

Francis (1986) enumera as propriedades básicas da *duration* e da convexidade:

- *duration* cresce com o prazo de vencimento do título, porém a taxas decrescentes;
- *duration* decresce com o aumento do *yield-to-maturity* do instrumento;
- quanto maior o cupom do instrumento, menor *duration* ele apresentará;
- quanto maior a convexidade de um instrumento, maior é a proteção conseguida contra aumentos de taxas de juros, e maiores os ganhos possíveis em decorrência de uma queda de taxas de juros
- a convexidade é desejada em posições ativas
- ativos com maior convexidade devem ser mais valiosos
- convexidade aumenta com o prazo da obrigação
- convexidade é inversamente proporcional ao cupom
- ativos com fluxos concentrados têm convexidade menor e quanto mais disperso for o conjunto de fluxos do instrumento, maior é sua convexidade
- para mesma *duration*, a convexidade diminui com o cupom
- quanto maior a convexidade, maior o erro em não utilizá-la
- todos os títulos de renda fixa têm convexidade

3. Instrumentos pós-fixados

Os instrumentos pós-fixados são aqueles em que os fluxos de caixa futuro são indexados a uma moeda, índice de inflação ou fator de taxa de juros. No Brasil, os principais indexadores são a taxa cambial R\$/US\$, os índices de inflação IGP-M, da Fundação Getúlio Vargas, e o IPCA, do IBGE, e as taxas de juros TR, TBF e DI. Os instrumentos são remunerados pelo indexador e um *spread* de taxa, que é o *yield-to-maturity* (ou taxa interna de retorno) do fluxo indexado. A rentabilidade é calculada a partir da composição da variação do indexador e da taxa. Quando o instrumento é indexado à TBF, o *spread* pode ser aditivo. Já no caso do DI, utiliza-se também o percentual sobre taxa. Nesta sessão analisaremos o caso de composição do *spread* e na seguinte o do percentual do DI. O caso aditivo não será analisado neste trabalho.

Uma abordagem para se calcular o preço de um instrumento pós-fixado é transformar seus fluxos em parcelas prefixadas, utilizando uma estimativa de comportamento do indexador. A taxa de desconto também deve considerar tal previsão. Assim, os fluxos futuros do instrumento são dados por:

$$F_t = f_t * (1 + h_t) \quad (10)$$

em que: F_t : valor nominal do fluxo em t ;
 f_t : valor do fluxo referenciado no indexador;
 h_t : variação do indexador no período 0 a t .

e a taxa de desconto dos fluxos é dada por:

$$(1 + y)^t = (1 + k)^t * (1 + h_t) \quad (11)$$

em que: y : *yield-to-maturity* nominal do fluxo;
 k : *yield-to-maturity* referenciado no indexador praticado pelo mercado.

Assim, combinando a equação geral do preço de um título (equação 1) com as duas equações acima, obtemos

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{f_t * (1 + h_t)}{(1 + k)^t * (1 + h_t)} \quad \text{ou} \quad P = \sum_{t=1}^N \frac{f_t}{(1 + k)^t} \quad (12)$$

Demonstra-se que a previsão de comportamento do indexador não interfere na formação do preço do instrumento pós-fixado com cálculo baseado na metodologia da composição do *spread* com o indexador. Da mesma forma, a análise de *duration*-convexidade desenvolvida na seção precedente é aplicada a estes instrumentos, considerando-o como fator de risco as taxas em referência ao indexador.

4. Percentual do DI

As taxas DI são calculadas pela Cetip com base nas operações de emissão de Depósitos Interfinanceiros pré-fixados lá registradas, pactuadas por um dia útil, considerando apenas as operações extra-grupo, aquelas realizadas entre instituições de conglomerados diferentes. Essa taxa também é chamada de CDI, DI Over ou simplesmente de DI, termo que será utilizado neste trabalho. As operações indexadas a essa taxa podem utilizar a metodologia de composição de *spread*, tratada na seção anterior, ma, em geral, é utilizada a metodologia de percentual do DI.

Conforme esclarece a Cetip (2007), o cálculo do percentual do DI é feito com base na

fórmula:

$$\phi = \prod_{t=1}^N (1 + r_t * \pi) \quad \text{e} \quad r_t = (1 + I_t)^{\frac{1}{252}} - 1 \quad (13)$$

em que: ϕ : fator acumulado do percentual do DI, no período de 1 a N ;
 r_t : rentabilidade diária do DI;
 π : percentual do DI na forma decimal;
 I_t : taxa divulgada do DI, em base anual, para a data i .

Considerando-se uma taxa média I do DI constante para um período futuro, temos, para o retorno diário e para o fator acumulado:

$$\phi = (1 + r * \pi)^N \quad \text{e} \quad r = (1 + I)^{\frac{1}{252}} - 1 \quad (14)$$

Desta forma, o fluxo de caixa de um instrumento indexado ao percentual do DI é dado por:

$$F_t = f_t * (1 + r * \pi)^t \quad \text{e} \quad r = (1 + I)^{\frac{1}{252}} - 1 \quad (15)$$

Como taxa de desconto de cada fluxo, devemos considerar como fator relevante o percentual do DI praticado pelo mercado (p) a ser aplicado sobre a expectativa de remuneração do DI. Resta-nos o problema da previsão de I , taxa média esperada do DI diário para o período futuro. Ohanian (2005) lembra que o mercado utiliza as taxas prefixadas como previsão do comportamento da taxa DI, metodologia que adotaremos. Desta forma, r , a rentabilidade diária do DI, para o período t (medido em dias úteis) é dada por:

$$r_t = (1 + y_t)^{\frac{1}{252}} - 1 \quad (16)$$

Finalmente, combinando a equação geral do preço de um título (equação 1) com as duas equações acima, e considerando uma taxa y média, obtemos a fórmula para o cálculo do preço de um instrumento indexado ao percentual do DI, com base em r , a rentabilidade diária do DI:

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{f_t * (1 + r * \pi)^t}{(1 + r * p)^t} \quad \text{e} \quad r = (1 + y)^{\frac{1}{252}} - 1 \quad (17)$$

Já vimos que a taxa y (e, portanto, r) pode variar, sendo um fator de sensibilidade do preço do instrumento. Neste caso, porém, temos um novo fator que pode variar, p , o percentual do DI praticado pelo mercado. Assim, a equação diferencial para análise de sensibilidade deve levar em conta os dois fatores.

A primeira derivada parcial é em relação à taxa r . Obtém-se:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -P_0 * \left(\frac{P_0 - \pi}{(1 + r_0 * p_0) * (1 + r_0 * \pi)} \right) * \frac{\sum_{t=1}^N \left(t * \frac{f_t * (1 + r_0 * \pi)^t}{(1 + r_0 * p_0)^t} \right)}{P_0} \quad (18)$$

A expressão obtida é semelhante à equação 3.1, com a inclusão de π , percentual do DI, como fator de correção na taxa de juros. Por analogia, podemos considerar os dois últimos fatores da equação obtida como a *duration* modificada em relação à taxa r . Assim:

$$\frac{\delta P}{\delta r} = -P_0 * mdur_r \quad (19)$$

e

$$mdur_r = \left(\frac{p_0 - \pi}{(1+r_0 * p_0) * (1+r_0 * \pi)} \right) * \frac{1}{P_0} * \sum_{t=1}^N \left(t * \frac{f_t * (1+r_0 * \pi_0)^t}{(1+r_0 * p_0)^t} \right) \quad (20)$$

A equação 19 mostra que a sensibilidade do preço do instrumento em relação a variações da taxa de juros depende do percentual do DI estampado e do percentual do DI p_0 praticado pelo mercado, ou utilizado no instrumento de *hedge*. Assim, se $p_0 = \pi$, o preço é insensível a mudanças na taxa. Se $p_0 > \pi$, a $mdur$ é positiva implicando na relação inversa entre alteração de taxas de juros e de preço do instrumento, conforme esperado. Porém, quando temos $p_0 < \pi$, a $mdur$ é negativa, anulando a relação inversa entre preço e taxa. O que se pensava ser uma posição ativa é, na verdade, uma posição passiva, com possíveis perdas decorrentes de redução das taxas. Mesma conclusão foi relatada por Ohanian (2005) ao estudar um instrumento com apenas um fluxo e considerando que p_0 de mercado é 100% do DI. A Figura 1 ilustra este caso, para um título de 252 dias úteis, emitido a 100% do DI, quando a taxa prevista para o DI era, no exemplo, de 10% aa.

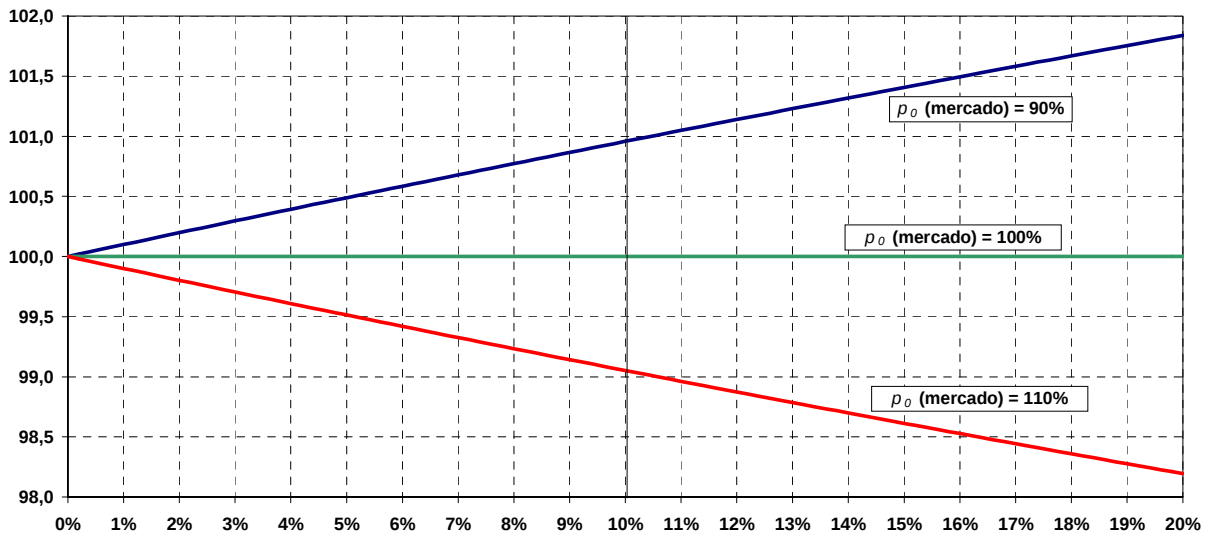


Figura 1 – Variação do preço em relação à taxa de juros

Calculando-se a derivada parcial em relação a p , percentual do DI praticado pelo mercado, obtemos:

$$\frac{\delta P}{\delta p} = -P_0 * \frac{r_0}{(1+r_0 * p_0)} * \frac{\sum_{t=1}^N \left(t * \frac{f_t * (1+r_0 * \pi)^t}{(1+r_0 * p_0)^t} \right)}{P_0} \quad (21)$$

Como procedemos anteriormente, podemos expressar a derivada em função da *duration* modificada em relação a π .

$$\frac{\delta P}{\delta p} = -P_0 * mdur_p \quad (22)$$

e

$$mdur_p = \frac{r_0}{(1+r_0 * p_0)} * \frac{1}{P_0} * \sum_{t=1}^N \left(t * \frac{f_t * (1+r_0 * \pi)^t}{(1+r_0 * p_0)^t} \right) \quad (23)$$

Neste caso, a *duration* modificada será sempre positiva, mantendo a relação inversa entre o fator de sensibilidade e o preço.

Finalmente, escrevendo-se a equação diferencial de primeira ordem para a variação do preço de um instrumento indexado ao percentual do DI,

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial r} * \Delta r + \frac{\partial P}{\partial p} * \Delta p \quad (24)$$

obtemos:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = - \frac{\sum_{t=1}^N \left(t * \frac{f_t * (1+r_0 * \pi)^t}{(1+r_0 * p_0)^t} \right)}{P_0} * \left\{ \left(\frac{p_0 - \pi}{(1+r_0 * p_0) * (1+r_0 * \pi)} \right) * \Delta r + \frac{r_0}{(1+r_0 * p_0)} * \Delta p \right\} \quad (25)$$

A análise da convexidade é feita a partir da segunda derivada. As quatro equações obtidas foram:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = N * P_0 * (p_0 - \pi) * \left(\frac{p}{(1+r_0 * p_0)} + \frac{\pi}{(1+r_0 * \pi)} \right) \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p^2} = \frac{N * P_0 * r_0^2}{(1+r_0 * p_0)^2} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial p} = \frac{N * P_0}{(1+r_0 * p_0)^2} * \frac{(r_0^3 \pi p_0 + 3r_0^2 (p_0 - \pi) - 1)}{(1+r_0 * \pi)^2} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p \partial r} = \frac{N * P_0}{(1+r_0 * p_0)^2} * (p_0 - 1 - r_0 * p_0) \quad (29)$$

É importante observar-se o sinal da convexidade. No caso da equação 26, o sinal depende da relação $(p_0 - \pi)$, já abordada na análise da *duration*. Ou seja, além de correr o risco de uma *duration* negativa, há o risco de uma convexidade invertida, quando $p_0 < \pi$, dado que a *duration* é negativa. Se $p_0 = \pi$, mantém-se a insensibilidade em relação à taxa de juros. Em temos da equação 27, a convexidade é sempre positiva, não havendo alterações em relação à análise tradicional de convexidade. Para a análise das equações 28 e 29, desprezamos os valores em r_0 no final das equações, visto que se tratam de taxas diárias, próximas de zero. Assim, da equação 28, conclui-se que a convexidade é sempre negativa e, da equação 29, que a convexidade será negativa para valores de p_0 , percentual do DI praticado pelo mercado, menores que 100%.

5. Considerações finais

O propósito do presente trabalho foi o de analisar o comportamento do preço de instrumentos pós-fixados com base na metodologia *duration*-convexidade, ampliando a metodologia proposta por Ohanian (2005). No caso do cálculo com base na composição do spread com o indexador, a análise segue os moldes tradicionais, considerando-se como um prefixado, porém referenciado no indexador.

No caso de percentual do DI, instrumento de uso comum no mercado financeiro brasileiro, são dois os fatores de risco considerados: a previsão do comportamento do DI, geralmente tomada com base nos contratos DI Futuro da BM&F, e o comportamento do percentual do DI praticado pelo mercado. Foi mostrado que a *duration* modificada do fator taxa de juros depende do percentual do DI praticado pelo mercado, sendo negativa quando este for menor que o contratual. Este fato acarreta também convexidade invertida.

O fator de risco percentual do DI apresentou um comportamento esperado em relação à análise *duration*-convexidade. Finalmente, a análise da convexidade mostrou que a combinação dos dois fatores de risco pode inverter a convexidade.

Referências bibliográficas

ANBID. **Boletim de Fundos de Investimento**. Ano II, n. 14, Junho 2007. Disponível em <www.anbid.com.br>. Acesso em 8 junho. 2007.

CETIP. **Taxa di-cetip: metodologia de cálculo acumulado**. Disponível em <www.cetip.com.br>. Acesso em 14 maio. 2007.

FABOZZI, F. J. **Mercado, análise e estratégia de bônus: títulos de renda fixa**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2000.

FABOZZI, F. J; MODIGLIANI, F. **Capital markets: institutions and instruments**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1992.

FERREIRA, L. F. **Manual de gestão de renda fixa**. Porto Alegre: Bookman, 2004

FRANCIS, J. C. **Investments: analysis and management**. 4th ed. New York: McGraw-Hill, 1986.

HAUGEN, R. A. **Modern Investment Theory**. 4th ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1997.

SECURATO, J. R. (Org.) **Cálculo financeiro das tesourarias**. 2^a ed. São Paulo: Saint Paul, 2003.

OHANIAN, G. **Operações indexadas ao percentual do CDI: precificação e hedge dinâmico usando o contrato DI futuro da BM&F**. In: Encontro Brasileiro de Finanças 5, da Sociedade Brasileira de Finanças, São Paulo, 2005. **Anais Eletrônicos**. Disponível em <www.sbfin.org.br>. Acesso em 21 nov. 2005.

SND. **Base de Dados**. Disponível em: <www.debentures.com.br>. Acesso em: 8 jun. 2007.