

ECONOMIA DAS ORGANIZAÇÕES

ANÁLISE DE MODELO DE MERCADO POR MEIO DE CONJUNTOS DIFUSOS

AUTORES

NELSON HEIN

Fundação Universidade Regional de Blumenau - FURB

hein@furb.br

ADRIANA KROENKE

FURB-Fundação Universidade Regional de Blumenau

akroenke@al.furb.br

THAIS MARIANE BIEMBENGUT

Universidade Regional de Blumenau

thaismariane@gmail.com

RESUMO

Conjuntos difusos são utilizados nos casos em que existe a possibilidade de um grau intermediário de pertinência ou não-pertinência a um determinado conjunto. Deste modo, diferencia-se da teoria dos conjuntos clássicos onde um determinado elemento pertence ou não a um grupo. Considerando o modelo “teia de aranha” é possível utilizar conjuntos difusos para um modelo de oferta e demanda de um único produto. Neste sentido, o objetivo deste estudo consiste na análise do equilíbrio intertemporal a partir das hipóteses de incerteza estabelecidas por meio do desenvolvimento de um modelo citado na sua versão difusa, com o intuito de descrevê-lo em uma forma mais realista quanto ao comportamento de preços. Neste artigo foi analisado o comportamento do modelo de mercado com um único bem em que se considera que os parâmetros que relacionam as variáveis que incorporam o modelo vem expressas por meio de magnitudes incertas. Conclui-se que ao considerar o modelo “teia de aranha” e suas funções de oferta e demanda definidas por números difusos, é possível verificar o preço desde um ponto de vista realista permitindo estabelecer uma convergência do preço com certa possibilidade de ocorrência.

Palavras-chave: Oferta e demanda. Modelo Matemático. Conjuntos Difusos.

ABSTRACT

Diffuse sets are used in cases where there is a possibility of an intermediate degree of relevance or non-relevance to a given set. Thus, it is distinguished from the classical theory of sets where a given element belongs to a group or not. Considering the "spider web" model it is possible to use diffuse sets to a supply and demand model for one product. Accordingly, the objective of this study consists in the analysis of the inter-temporal balance from assumptions of uncertainty established through the process of developing a model quoted in its diffuse version, in order to describe it in a more realistic way the behavior of prices. This article has examined the behavior of the market model with a single property, in which it is considered that the parameters that relate the variables that incorporate the model are expressed by means of uncertain magnitude. It is implied that, in considering the “spider web” model and its supply and demand functions defined by diffuse numbers, it is possible to check the price

from a realistic point of view, allowing the establishment of a price convergence with a certain possibility of occurrence.

Key-words: Supply and demand. Mathematical Model. Diffuse Sets.

1 INTRODUÇÃO

Analisando o mercado é possível perceber a variedade de produtos ofertados. Cada qual possui características específicas, como por exemplo, de produção, de armazenamento e de comercialização. Considerando essas características, faz-se necessário atentar-se à oferta e a demanda de cada produto, pois determinados produtos não podem ser armazenados por muito tempo e, nesses casos, a produção deverá ser de acordo com a demanda do produto.

Browning e Zupan (2004) destacam que a quantidade de um bem que os consumidores desejam adquirir depende de vários fatores como renda, idade, nível de instrução, experiência, preferências, impostos, subsídios, expectativas e também do preço estabelecido. Mankiw e Gregory (2005, p. 63) afirmam que “a oferta e a demanda são as forças que fazem as economias de mercado funcionar” e se encontrar um ponto em que a quantidade ofertada é igual a quantidade demandada tem-se o ponto de equilíbrio. E, neste sentido, Browning e Zupan (2004, p. 15) complementam que “de acordo com a lei da oferta, quanto mais alto for o preço de um bem, maior será a quantidade que as firmas estarão dispostas a produzir”. Problemas de mercado como de oferta e demanda contam com o apoio de técnicas matemáticas para análise e previsões que auxiliam na tomada de decisão. São utilizados para tal, modelos que possibilitam verificar o comportamento da produção dos mais variados setores. Um modelo que pode ser utilizado é o teorema de Cobweb (1938) que resultou naquilo que hoje é conhecido por modelo “teia de aranha”. Este modelo matemático segue um padrão de comportamento que envolve defasagens no tempo. Segundo Yamaguchi e Araújo (2006), para a formulação e ajustamento do modelo teia de aranha, é necessário estabelecer alguns pressupostos:

- (i) o produto deve ser produzido dentro de um determinado período de tempo;
- (ii) a ausência de estoques significativos do produto;
- (iii) a existência de um grande número de empresas no setor, contudo insuficiente para influenciar as condições do mercado do produto;
- (iv) a suposição de que os empresários tomam suas decisões acreditando que os preços correntes e os custos de produção não sofrerão mudanças durante o período.

O modelo ainda pode ser classificado pelo seu ajustamento: “ciclo convergente (estável), ciclo divergente (instável) e ciclo contínuo” (YAMAGUCHI & ARAÚJO, 2006).

O propósito deste artigo é contribuir no modelo “teia de aranha” em uma versão difusa, em sua forma linear. Entre os numerosos métodos desenvolvidos dentro da teoria dos conjuntos difusos estão os números difusos. Desta forma, o objetivo deste estudo consiste na análise do equilíbrio intertemporal a partir das hipóteses de incerteza estabelecidas por meio do desenvolvimento de um modelo citado na sua versão difusa, com o intuito de descrevê-lo em uma forma mais realista quanto ao comportamento de preços.

Em especial será desenvolvido o modelo de ciclo convergente (estável), contudo a transposição dos dois restantes segue o mesmo método, porém por juízo dos autores menos interessante que o que se pretende.

Por último, serão apresentados, um modelo numérico e sua respectiva interpretação geométrica.

2 MAPEAMENTO TEÓRICO

Considerando o estudo de um modelo de oferta e procura no qual se possui apenas um único produto e tanto a quantidade demandada e ofertada são funções lineares do preço (CHIANG, 1987), considerando este último como uma função do tempo (discreto), dado pelas expressões:

$$Q_{\text{demanda}} = -aP_{t+1} + c; a, c > 0$$

$$Q_{\text{oferta}} = bP_t - d; b, d > 0$$

Em que se conhece o preço do produto no instante $t=0$, ou seja, $P(0)=P_0$. Nestas condições o teorema de Cobweb (AWH, 1976) procura determinar se existe um tempo t no qual o mercado entra em equilíbrio (dinâmico), ou seja: $Q_{\text{demanda}} = Q_{\text{oferta}}$. Impondo esta condição têm-se, graficamente, os três resultados possíveis: convergência, divergência e ciclo contínuo. Matematicamente o problema toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} c - aP_{t+1} &= -d + bP_t \\ aP_{t+1} + bP_t &= c + d \\ P_{t+1} + \frac{b}{a}P_t &= \frac{c+d}{a} \end{aligned}$$

Observe-se que se trata de uma equação de diferenças finitas de primeira ordem do tipo linear, que resolvida resulta em:

$$P_t = \left(P_0 - \frac{c+d}{a+b} \right) \cdot (-1)^t \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^t + \frac{c+d}{a+b}$$

Que apresenta a relação entre o preço e o tempo. Substituindo este valor nas funções de demanda e oferta, tem-se:

$$\begin{aligned} Q_{\text{demanda}} &= c - a \left[\left(P_0 - \frac{c+d}{a+b} \right) \cdot (-1)^{t+1} \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^{t+1} + \frac{c+d}{a+b} \right] \\ Q_{\text{oferta}} &= b \left[\left(P_0 - \frac{c+d}{a+b} \right) \cdot (-1)^t \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^t + \frac{c+d}{a+b} \right] - d \end{aligned}$$

Com o qual pode se observar que não existe nenhum valor finito para t para o qual o mercado entre em equilíbrio. Não obstante, caso se faça o tempo tender para o infinito, sempre que a relação $\frac{a}{b}$ se mantenha inferior a unidade, então a demanda será igual a oferta e, neste caso, o

preço tende a um preço limite dado por: $P_{\infty} = \frac{c+d}{a+b}$, com o qual pode se dizer que a trajetória

temporal é convergente. Caso a relação $\frac{a}{b}$ seja a unidade, haverá a flutuação contínua e

regular do produto (YAGER, 1975). No caso de $\frac{a}{b}$ ser maior que a unidade, o processo de

ajustamento preço-quantidade no modelo da teia de aranha é de ciclo divergente.

Geometricamente, isto foi assim esboçado por Yamaguchi e Araújo (2006), em sua forma não linear.

(a) Ciclo convergente:

Yamaguchi e Araújo (2006, p. 3) afirmam que “o ajustamento entre preços e quantidades no modelo da teia de aranha de ciclo convergente ocorre quando a inclinação da curva de demanda do produto for menor, em termos absolutos, do que a inclinação da curva de oferta do produto”, conforme pode ser observado na Figura 1.a e 1.b.

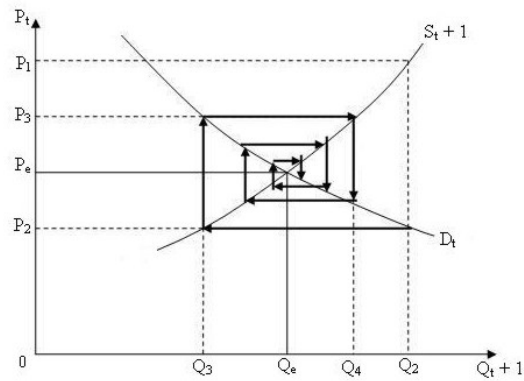


Figura 1.a

Fonte: Yamaguchi e Araújo (2006).

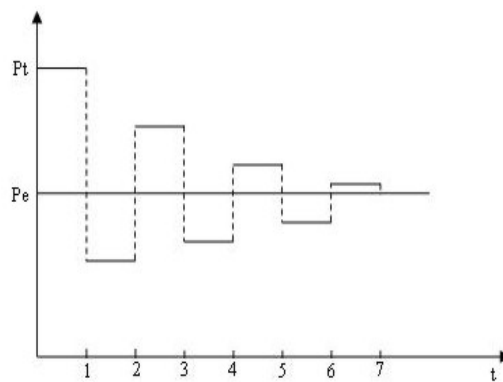


Figura 1.b

Fonte: Yamaguchi e Araújo (2006).

Figuras 1.a e 1.b: Modelo de teia de aranha de ciclo convergente

(b) Ciclo divergente:

Neste caso, conforme Yamaguchi e Araújo (2006), o modelo da teia de aranha ocorre quando a inclinação da curva de demanda for maior, em termos absolutos, do que a inclinação da curva de oferta do produto, ilustrado na Figura 2.a e 2.b.

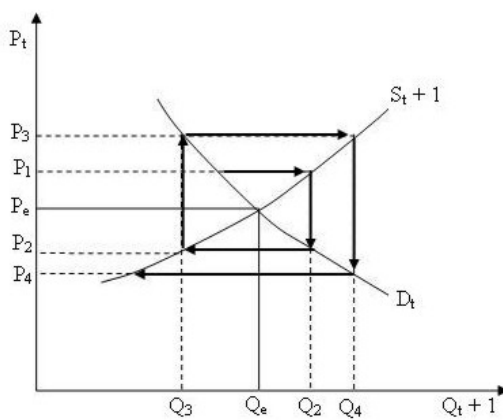


Figura 2.a

Fonte: Yamaguchi e Araújo (2006).

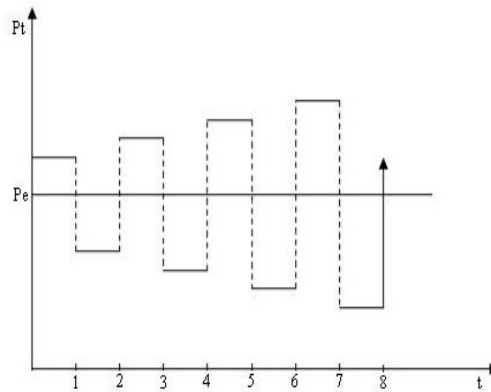


Figura 2.b

Fonte: Yamaguchi e Araújo (2006).

Figuras 2.a e 2.b: Modelo de teia de aranha de ciclo divergente.

(c) Ciclo contínuo:

Neste, não ocorre nem convergência, nem divergência. Yamaguchi e Araújo (2006) destacam que neste caso, o modelo da teia de aranha retrata uma situação em que as curvas de demanda e de oferta do produto apresentam a mesma inclinação em termos absolutos.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Será analisada em seqüência a convergência da trajetória do preço no modelo de teia de aranha quando se consideram a demanda e a oferta como números difusos. Em consequência, os coeficientes do preço também serão números difusos (BUCKEY, 1992).

Para Hein (1998), entende-se por conjuntos difusos um sistema lógico não clássico, onde além da não validade do princípio do terceiro excluído, seus valores-verdade são lingüísticos e interpretados por funções em contraposição aos valores V e F da lógica clássica. Esses valores-verdade são dados por conjuntos difusos, definidos no intervalo real unitário, formando um conjunto enumerável.

Conforme Dubois e Prade (1980) os conjuntos difusos se distinguem ainda, por trabalhar com raciocínios aproximados aquilo que, aliado à capacidade de interpretação dos conjuntos difusos, acaba por permitir que a mesma se ajuste melhor à linguagem natural e, portanto, às linguagens de ciências não exatas, recapturando o significado de termos vagos, vistos como predicados difusos.

Um número difuso é um subconjunto difuso do conjunto dos números reais (KAUFFMANN, 1985), ou seja, ao se tratar de um número difuso “N”, se está tratando na verdade de um número $\tilde{N}$ que quer dizer “aproximadamente N”. Com isso, associa-se um grau de pertinência ao número. Por exemplo, seja o número difuso $\tilde{N} = 2$, definido pelas seguintes funções de pertinência:

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} 0; x < 0 \\ \frac{x}{2}; 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{-x + 4}{2}; 2 \leq x \leq 4 \\ 0; x > 4 \end{cases}$$

Os números próximos ao valor original “2” valem “quase 2”, assim podem ser aproximados como segue no Quadro 1.

X	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_{\tilde{N}}(x)$	0	0,4	0,6	0,9	1	0,9	0,6	0,4	0

Quadro 1: Grau de pertinência associado ao intervalo real [-2, 6] ao número difuso $\tilde{N} = 2$.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A notação do modelo econômico de oferta e procura na simbologia dos conjuntos difusos fica assim descrito:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{\text{demanda}} &= -\tilde{a} \tilde{P}_{t+1} + c \\ \tilde{Q}_{\text{oferta}} &= \tilde{b} \tilde{P}_t - d\end{aligned}$$

Onde c e d são números reais positivos e $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ são dois números difusos definidos por suas respectivas funções de pertinência ou equivalentemente por seus α -cortes:

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{a}}(x) \right) \right\} \text{ ou } a_{\alpha} = [\underline{a}(\alpha), \bar{a}(\alpha)] \\ \tilde{b} &= \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{b}}(x) \right) \right\} \text{ ou } b_{\alpha} = [\underline{b}(\alpha), \bar{b}(\alpha)]\end{aligned}$$

Além disso, se suposto que os números difusos são definidos positivos e do tipo L-R com suporte compacto (HEIN, 1998). Com estas hipóteses tem-se:

$$\begin{aligned}a_0 &= [\underline{a}(0), \bar{a}(0)] \subset \mathfrak{R}^+ & b_0 &= [\underline{b}(0), \bar{b}(0)] \subset \mathfrak{R}^+ \\ \mu_{\tilde{a}}(x) &= \begin{cases} 0; x < \underline{a}(0) \\ L_{\alpha}(x); \underline{a}(0) \leq x < a(1) \\ 1; x = a(1) \\ R_{\alpha}(x); a(1) < x \leq \bar{a}(0) \\ 0; x > \bar{a}(0) \end{cases} & \mu_{\tilde{b}}(x) &= \begin{cases} 0; x < \underline{b}(0) \\ L_{\alpha}(x); \underline{b}(0) \leq x < b(1) \\ 1; x = b(1) \\ R_{\alpha}(x); b(1) < x \leq \bar{b}(0) \\ 0; x > \bar{b}(0) \end{cases}\end{aligned}$$

Com estas condições pode-se determinar o preço por condições difusas:

$$\tilde{P}_t = \left(P_0 - \frac{c+d}{\tilde{a}+\tilde{b}} \right) \cdot (-1)^t \cdot \left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} \right)^t + \frac{c+d}{\tilde{a}+\tilde{b}}$$

Para estudar a convergência da trajetória desde um ponto de vista dos números difusos, deve-se comparar os números difusos $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$. Um modo pode ser a partir da função de pertinência de $\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$.

Calculando a parte proporcional da área situada a esquerda da reta $x=1$ e dentro do gráfico da função de pertinência de $\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$ e da área inscrita por essa função de pertinência. Isto apresenta o

inconveniente de que a função de pertinência $\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$ em geral será complicada e o cálculo destas

áreas pode ser muito trabalhoso. Devido a isto, propõe-se um método alternativo definindo o que se chamará a partir de agora o coeficiente de convergência do preço (BERTRAN, 2001)

que será designado por β . Seu cálculo será dado por: $\beta = \frac{A_1 + A_2}{2A_r}$, onde A_1 é a área situada a

esquerda de L_α e dentro de $\tilde{b}$, A_2 é a área situada a esquerda de R_α e dentro de $\tilde{b}$ e A_r é a área total limitada pelo número difuso $\tilde{b}$, como pode ser visto na Figura 3.

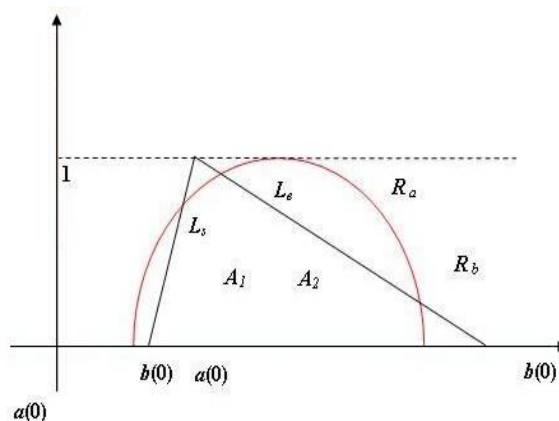


Figura 3: Área limitada pelo número difuso $\tilde{b}$.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Note-se que se $\bar{b}(0) < \underline{a}(0)$, então $\beta=1$, ou seja, a trajetória será convergente; por outro lado, se $\bar{b}(0) > \underline{a}(0)$, se terá $\beta=0$, portanto a trajetória será convergente. Com isso β representa a possibilidade de que a trajetória do preço convirja ao número difuso $\frac{c+d}{\tilde{a}+\tilde{b}}$, ou ainda que a

possibilidade de que a trajetória convirja ao número difuso $\frac{c+d}{\tilde{a}+\tilde{b}}$ seja β .

Há casos particulares, caso se suponha que o número difuso $\tilde{a}$ seja nítido, neste caso denomina-se $\tilde{c} = \frac{\tilde{b}}{a}$, fazendo com a função de pertinência de $\tilde{c}$ seja $\mu_{\tilde{c}} = \mu_{\tilde{b}}(ax)$. Neste caso, pode-se observar que o coeficiente de convergência é de 0,5 da proporção entre a área

limitada a esquerda da reta $x=a$ com a função de pertinência do número difuso $\tilde{b}$ e a área limitada pela função de pertinência deste número.

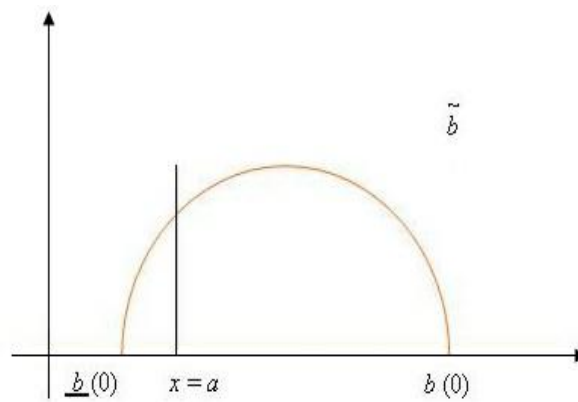


Figura 4: Área limitada pela função de pertinência do número difuso $\tilde{c}$.

Fonte: Elaborado pelos autores.

O resultado é equivalente a proporção entre a área situada a esquerda da reta $x=1$ com a função de pertinência do número difuso $\tilde{c}$ e a área limitada pela função de pertinência do número difuso $\tilde{b}$. Com efeito:

$$\beta = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\int_{\underline{b}(0)}^a \mu_{\tilde{b}}(x) dx}{\underline{b}(0)}}{\int_{\underline{b}(0)}^a \mu_{\tilde{b}}(x) dx}$$

Fazendo-se uma troca de variável $x = at \Rightarrow dx = a dt$, então:

$$\begin{array}{ll} x = \underline{b}(0) & t = \frac{\underline{b}(0)}{a} \\ x = \bar{b}(0) & t = \frac{\bar{b}(0)}{a} \\ x = a & t = 1 \end{array}$$

$$\text{Com isso: } \beta = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\int_{\underline{b}(0)}^a \mu_{\tilde{b}}(at) dt}{\underline{b}(0)}}{\int_{\underline{b}(0)}^a \mu_{\tilde{b}}(at) dt} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\int_{\frac{\underline{b}(0)}{a}}^1 \mu_{\tilde{c}}(t) dt}{\underline{b}(0)}}{\int_{\frac{\underline{b}(0)}{a}}^1 \mu_{\tilde{c}}(t) dt}.$$

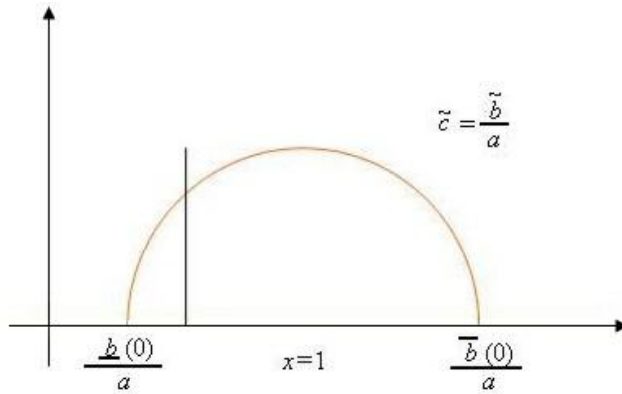


Figura 5: Caso particular em que o número difuso $\tilde{a}$ é nítido.

Fonte: Elaborado pelos autores.

No caso particular em que $\tilde{b}$ é nítido, então o coeficiente de convergência será definido como a proporção da área situada dentro do número difuso $\tilde{c} = \frac{b}{\tilde{a}}$ e a região a esquerda da reta $x=1$.

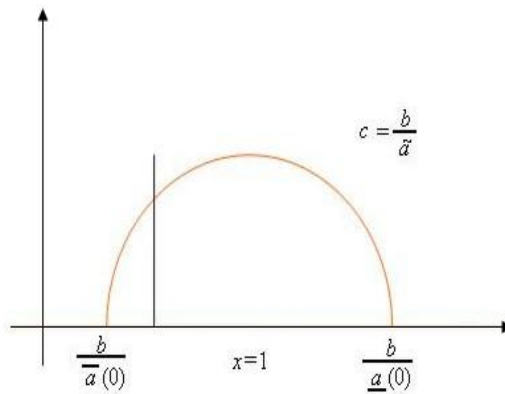


Figura 6: Caso particular em que o número difuso $\tilde{b}$ é nítido.

Fonte: Elaborado pelos autores.

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Foi organizado um exemplo numérico da teoria apresentada. Sejam os número difusos triangulares $\tilde{a}=(2, 5, 12)$ e $\tilde{b}=(1, 6, 10)$, cujas funções de pertinência são:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{2}; 2 \leq x < 5 \\ \frac{12-x}{7}; 5 \leq x < 12 \end{cases} \quad \mu_{\tilde{b}}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{5}; 1 \leq x < 6 \\ \frac{10-x}{4}; 6 \leq x < 10 \end{cases}$$

Na Figura 7 pode-se acompanhar a representação gráfica das funções de pertinência.

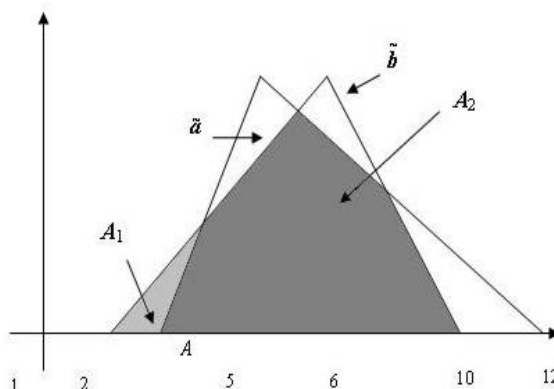


Figura 7: Representação gráfica das funções de pertinência dos números difusos $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$.

Fonte: Elaborado pelos autores.

O cálculo das áreas resulta em: $A_1=0,25$; $A_2=4,125$ e $A_T=4,5$. Com isso o coeficiente de convergência valerá $\beta=0,483$.

No caso do número difuso $\tilde{a}$ ser nítido e que seu valor seja $a=3$ e que o número $\tilde{b}$ se mantenha difuso, então $A_1=0,125$ e $A_T=3$ e com isso $\beta=0,021$.

5 CONCLUSÕES

O objetivo deste estudo consistiu na análise do equilíbrio intertemporal a partir das hipóteses de incerteza estabelecidas por meio do desenvolvimento de um modelo citado na sua versão difusa, com o intuito de descrevê-lo em uma forma mais realista quanto ao comportamento de preços.

O modelo da “teia de aranha” é válido somente para os casos em que os ajustamentos de preços e quantidades no mercado forem completamente descontínuos. Isto muitas vezes não ocorre como ressaltam Yamaguchi e Araújo (2006). Contudo, Kaldor (1934) expandiu o modelo da “teia de aranha” para casos em que existam ajustamentos contínuos de preços e quantidades, mas esta análise foge ao escopo deste estudo.

Ao considerar o modelo “teia de aranha” as funções de demanda e oferta definidas a partir de números difusos, pode-se estudar a convergência da trajetória que mostra o preço desde um ponto de vista realista e permite estabelecer um coeficiente de convergência que resulta, em cada situação, na convergência do preço com uma certa possibilidade, obtida ao se estabelecer uma comparação entre números difusos, bem como sua comparação caso algum coeficiente do modelo da teia de aranha seja nítido.

REFERÊNCIAS

AWH, R.Y. **Microeconomics**: Theory and Applications. Nova York: John Wiley & Sons Inc., 1976.

BERTRAN, X. **Nous aspects de la teoria dels subconjunts borrosos i estudi d'algunes aplicacions a modela econòmics**. Tese de doutorado, Girona, julho de 2001.

BROWNING, E. K.; ZUPAN, M. A. **Microeconomia**: teoria e aplicações. Tradução de Bruna Catarine Caloi e Leila Almeida Rangel. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

BUCKEY, J.J. Solving **Fuzzy Equations in Economics and Finance**. Fuzzy Sets and Systems, 48, 1992.

CHIANG, A. C. **Métodos Fundamentais de Economia**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

DUBOIS, D.; PRADE, H. Operations on Fuzzy Numbers. **International Journal of Systems**. v. 9, n. 9.

HEIN, N. **Conjuntos Difusos**. Relatório Técnico. Blumenau: FURB, 1998.

KAUFFMANN, A.; GUPTA, M. **Introduction to Fuzzy Arithmetic**. Nova York: Van Nostrand Reinhold Company, 1985.

MANKIW, N. G. **Princípios de microeconomia**. Tradução de Allan Vidigal Hastings. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

YAGER, R.R.; BASSOS, D. **Decision-making With Fuzzy Sets**. Decision Sci. n. 3, 1975.

YAMAGUCHI, L.C.T.; ARAÚJO, L.F. **Dinâmica do Mercado com Ajustamento Defasado**. Revista Eletrônica de Economia. n. 7, março 2006.

ZADEH, L.A. **Fuzzy Sets as a Basis for a Theory os Possibility**, Fuzzy Sets and Systems, n.1, 1978.