

**Área Temática:** Finanças

**Título do Trabalho:** Avaliação do Desempenho Preditivo de Modelos para a Volatilidade: um Estudo para o Mercado Acionário Brasileiro entre 2000 e 2009

**AUTORES**

**PEDRO AUGUSTO ALVIM SABINO**

FACE

pedraosabino@gmail.com

**AURELIANO ANGEL BRESSAN**

Universidade Federal de Minas Gerais

bressan@face.ufmg.br

**Resumo:** O presente estudo tem por objetivo avaliar o desempenho preditivo de modelos de previsão de volatilidade, subdivididos em modelos de volatilidade histórica e de volatilidade condicionada, aplicados a uma amostra de ativos listados na Bovespa, em uma frequência diária entre janeiro de 2000 e janeiro de 2009. A amostra é subdividida em dois períodos, pré e pós crise dos mercados financeiros, de modo a verificar se existe diferença no desempenho preditivo entre os modelos em momentos de alta volatilidade. Os critérios de estimação e previsão tomam por base a proposição de Brooks e Persaud (2003) do uso de uma janela móvel, e o desempenho preditivo é avaliado em termos da Raiz do Erro Quadrado Médio para um horizonte de um dia. Os resultados obtidos indicam, de modo geral, um bom desempenho dos modelos GARCH (1,1) e EWMA, principalmente no período de menor volatilidade. Para o período de alta volatilidade observado entre Setembro de 2008 e Janeiro de 2009, constata-se relativa superioridade dos modelos GJR e EGARCH em relação aos demais, aspecto relevante para gestores de risco e agentes do mercado financeiro que necessitam de projeções de curto prazo da volatilidade para o gerenciamento de suas posições no mercado.

**Palavras-chave:** Volatilidade, Modelagem GARCH, Efeito Alavancagem.

**Abstract:** This study intends to evaluate the predictive performance of volatility forecasting models, categorized in historical volatility and conditional volatility models, applied to a sample of assets listed in Brazilian Bovespa stock market, using a daily frequency between January/2000 and January/2009. The sample is split in two periods, before and after the financial markets crisis, in order to verify the existence of differences in the predictive accuracy between the models in high volatility periods. The estimation and forecast criteria follow the approach proposed by Brooks and Persaud (2003) which consists in the use of a rolling window, and the predictive performance is evaluated in terms of Root Mean Square Error in a single day basis. The estimated results indicate that, in general, the GARCH (1,1) and EWMA models present good predictive performance, mainly in the lower volatility period. In the high volatility period, observed between September/2008 and January/2009, there is a relative superiority of the GJR and EGARCH models among the others, an important

issue for risk managers and financial markets agents who need volatility short term forecasts in order to manage their positions in the market.

**Keywords:** Volatility, GARCH Models, Leverage Effect.

## 1. Introdução

Durante o processo de tomada de decisão, investidores, gestores de carteiras de ativos e analistas de mercado empregam as mais variadas técnicas a fim de quantificar as incertezas e compreender da melhor maneira possível os riscos presentes no mercado financeiro. Nesse contexto, a volatilidade pode ser interpretada como balizador do nível de incerteza, fundamental para decisões de seleção de portfólios, precificação de derivativos e estratégias de *hedging*.

Nessa perspectiva, a modelagem da variabilidade dos ativos financeiros permite não só a representação da evolução do comportamento da variável, mas também a previsão de valores futuros da mesma. A previsão consistente do comportamento futuro dessa variável produzirá uma medida útil do risco que pode ser assumido por instituições e investidores no mercado financeiro.

Diante do exposto, desenvolveu-se uma densa literatura sobre a modelagem da previsão de volatilidade durante as duas últimas décadas, sobretudo a partir de 1996, com o acordo da Basileia. Tal acordo estabeleceu os princípios que norteiam o gerenciamento de riscos financeiros, tornando compulsório o exercício da previsão de volatilidade para as instituições financeiras dos países envolvidos.

Andersen *et al* (2006) sugerem que a volatilidade tem sido uma das áreas de pesquisa mais ativas e bem sucedidas em econometria de séries temporais e previsão econômica nas últimas décadas.

Como a volatilidade é uma variável que não pode ser observada diretamente no mercado, seu valor irá depender da escolha do modelo e dos parâmetros utilizados na sua estimação. Assim, mesmo que todos os modelos estejam tratando de uma mesma variável derivada do mesmo período, da mesma frequência e do mesmo ativo, haverá diferenças quanto à previsão da volatilidade. Diferenças estas que tendem a aumentar à medida que a oscilação do mercado aumenta (Alexander, 2001).

A escolha de um modelo está sujeita ao objetivo do usuário, e à capacidade de descrição do processo de volatilidade característico do mercado. Desta feita, ao se avaliar o poder preditivo, deve-se levar em conta as vantagens de modelos mais complexos em relação aos custos de implementação dos mesmos.

## 2. Problema de pesquisa e Objetivo

Os preços dos ativos financeiros são considerados variáveis aleatórias com função de distribuição própria, que são tomadas como lognormais devido à possibilidade teórica dos preços atingirem valores infinitos e não poderem ser negativos. Assim, variações nos preços desses ativos, ou seja, os retornos dos mesmos, seriam variáveis lognormalmente distribuídas. Contudo, uma vez que investidores avaliam os ativos com base em seus retornos, é mais simples assumir que estes apresentam distribuição normal. Como em pequenos intervalos de

tempo é possível aproximar a diferença dos preços pela diferença dos logaritmos dos preços, considera-se que o retorno no tempo  $t$  é definido por:  $r_t = \log p_t - \log p_{t-1}$ .

Assim, o retorno é avaliado como sendo normalmente distribuído. Por conseguinte, suas características são definidas simplesmente pelo primeiro e pelo segundo momento amostrais, ou seja, pela média e pela variância.

Portanto, a volatilidade é uma medida de dispersão, tratando-se da raiz quadrada do segundo momento da função de densidade de probabilidade do retorno. Na literatura sobre volatilidade, porém, a variância é comumente descrita de outra forma, que além de não ser enviesada, também fornece melhores previsões; na sua forma amostral ela é definida por

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (r^2) / n}^1.$$

Christoffersen (2003) define os seguintes fatos estilizados associados ao retorno de séries financeiras:

- Retornos diários são fracamente autocorrelacionados, o que torna quase impossível sua previsão, logo sua média condicional é tomada como constante.
- A distribuição incondicional dos retornos diários possui a cauda mais grossa do que uma distribuição normal, principalmente no lado esquerdo. Esse excesso de curtose e a assimetria negativa indicam maior probabilidade de retornos negativos do que uma distribuição normal sugere.
- O mercado de ações ocasionalmente exhibe muitas quedas acentuadas, mas movimentos de alta não tão acentuados assim, o que gera uma distribuição assimétrica do retorno.
- O desvio padrão domina completamente a média do retorno em horizontes curtos como o diário, sendo impossível rejeitar um retorno médio igual a zero.
- A variância, medida pelo retorno ao quadrado, possui autocorrelação positiva. Um aspecto já bem discutido na literatura é a grande persistência que a volatilidade possui, gerando efeito de longa memória, e a autocorrelação das funções de retorno é lenta ao decair. Assim, modelos de séries temporais buscam formalizar aproximações do verdadeiro processo de volatilidade, tentando capturar essa persistência.
- Para o caso específico de ações, tais assimetrias são em geral atribuídas a efeitos de alavancagem (onde retornos negativos afetam mais a variância do que efeitos positivos de mesma magnitude, ou seja, a variância e os retornos possuem correlação negativa), pois uma queda no valor da ação gera um aumento na relação dívida/capital próprio, uma vez que a dívida permanece constante no curto prazo. A empresa fica então mais

---

<sup>1</sup> É comum tomar o desvio de zero baseado na observação de que retornos médios diários e semanais em mercados especulativos são próximos de zero. Figlewski (1997) notou que calcular os desvios-padrão ao redor de zero ao invés da real média, aumenta a precisão da previsão de volatilidade.

alavancada e o seu futuro mais incerto, fazendo com que o preço das ações fique mais volátil. Isto resulta do fato de que os detentores de ações, que assumem o risco residual da firma, percebam que seu fluxo de caixa futuro é relativamente mais arriscado (Brooks (2002); Alexander (2001)).

- A correlação entre os ativos aparentemente é variante no tempo, aumentando muito em quedas de mercado voláteis e extremamente em quebras do mercado.
- Mesmo após serem padronizados por medidas de volatilidade variante no tempo, os retornos apresentam caudas mais grossas do que uma distribuição normal.
- À medida que o horizonte do retorno aumenta, a distribuição incondicional do retorno muda e se aproxima de uma distribuição normal.

Além disso, como descrito por Alexander (2001) e amplamente confirmado pela literatura vigente desde as observações de Mandelbrot (1963), a autocorrelação positiva da volatilidade indica que ela se apresenta em *clusters*. Assim, volatilidades altas tendem a estar mais próximas, valendo o mesmo para níveis de volatilidade mais baixas.

Uma vez que a distribuição incondicional dos retornos não é normal, a estimação por Máxima Verossimilhança fornece parâmetros para a média e a variância que convergem para os parâmetros verdadeiros à medida que a amostra torna-se suficientemente grande.

É nessa perspectiva que o problema de pesquisa do presente estudo é definido: *É possível identificar o melhor modelo, em termos de precisão preditiva, para a previsão da volatilidade dos retornos de ativos no mercado acionário brasileiro de forma generalizada?*

O objetivo básico do estudo consiste em avaliar o desempenho preditivo de modelos de previsão de volatilidade mais aplicados, tanto pelos acadêmicos quanto pelos usuários de mercado, a uma amostra de ativos listados na Bolsa de Valores de São Paulo – Bovespa. Para tanto, adota-se procedimentos de reamostragem e simulação tomando por base a proposição de Brooks e Persand (2003) do uso de uma janela móvel.

O uso de critérios operacionais, com métodos de avaliação da performance dos modelos de previsão em aplicações particulares tal como sugerido por Alexander (2001) e Poon e Granger (2005) permite acessar o desempenho de um modelo preditivo de volatilidade dentro de um contexto, só que também termina por gerar a necessidade de encontrar um modelo para cada uso<sup>2</sup>. Dessa forma, justifica-se a restrição da avaliação a critérios estatísticos apenas de tal forma que a avaliação da capacidade de generalização dos resultados seja mantida.

Levando em conta a influência do período amostral sobre o desempenho dos modelos como descrito na introdução, pretende-se ainda avaliar como o período recente de crise financeira afeta o desempenho dos modelos. Deste modo, a amostra avaliada e subdividida em duas, uma primeira, correspondente ao período estável e uma segunda, onde apresenta-se maior volatilidade.

---

<sup>2</sup> Exemplos de aplicação do critério operacional são as avaliações de modelos de previsão no contexto do VaR em Brooks e Persand (2003) e Sadorsky (2005).

### 3. Revisão Bibliográfica

Poon e Granger (2003) realizaram uma extensa revisão da literatura sobre estudos de modelos para volatilidade publicados até 2003. Foram revisados 93 artigos, que pesquisaram vários tipos de ativos com horizontes de previsão que variaram de uma hora a um ano. Desses 93 artigos, 66 realizaram comparações entre grupos de modelos. A análise desses artigos permitiu que os autores fizessem uma comparação entre quatro famílias de modelos de previsão de volatilidade, sendo três de séries-temporais e um de previsões baseadas na volatilidade implícita derivada dos preços das respectivas opções.

Assim, de acordo com este levantamento, os modelos de volatilidade implícita (ISD) fornecem melhores previsões, seguidos pelos de volatilidade histórica (baseados no desvio-padrão dos retornos) e os da família GARCH. O número de estudos sobre volatilidade estocástica, referente à quarta família de modelos, foi considerado pequeno demais para poder estabelecer qualquer conclusão sobre o desempenho relativo dos mesmos.

Assim, diante de tantos resultados divergentes, é difícil aceitar que uma única metodologia irá atender eficientemente a todos os propósitos. Nesse sentido, como os próprios autores sugerem, as comparações feitas nestes últimos artigos são baseadas em pesquisas cujas características amostrais e pressupostos (ativos, períodos, horizontes de previsão, frequências e medidas de avaliação) são distintos, interferindo na análise sobre a performance preditiva dos modelos.

Ainda é importante ressaltar que, mesmo que a ISD venha a ser melhor de acordo com Poon e Granger (2003), as opções são escritas em um número limitado de ativos e são negociadas apenas algumas bolsas. Dessa forma, alguns ativos importantes de mercados emergentes (tal como no Brasil, por exemplo) podem ser excluídos por essa forma de previsão. Além disso, existem indícios (Frennberg e Hansson, 1995) de que a ISD não funciona tão bem para *index options* de mercados menores.

Neely (2009) ainda argumenta que muitos autores têm investigado o viés proveniente de modelos de previsão da volatilidade implícita e ainda conclui que esta metodologia possui forte evidencia estatística de viés e ineficiência. Para tanto, ele demonstra que: ao contrário dos resultados obtidos por Poteshman (2000), medidas de alta frequência para a volatilidade não reduzem o viés aparente e mesmo a precificação da volatilidade em modelos de risco utilizando a volatilidade implícita, como recomendado por Chernov (2002), não elimina o viés.

Já o modelo SV, apesar de ser mais flexível que os demais modelos de séries temporais devido ao termo de inovação  $v_t$ , possui a interferência direta de  $\varepsilon_t$  muito mais complexa devido à introdução deste termo de inovação. Logo, deve-se levar em conta o alto custo de implantação deste diante do número ainda escasso de pesquisas empíricas quanto à eficiência dos mesmos. Conseqüentemente, relacionado ao objetivo de generalização, os modelos ISD e SV não foram avaliados no presente trabalho.

Pesquisas recentes (Andersen e Bollerslev (1998); Andersen, Bollerslev, Diebold e Labys (2003) e Andersen, Bollerslev e Meddahi (2005) por exemplo) indicam que realizações de volatilidade diária calculadas a partir da integração de retornos quadráticos intradiários (intervalos de 5 ou 15 minutos) produzem estimativas mais precisas para a volatilidade atual e suas previsões. Contudo, essa metodologia requer dados de retornos intradiários de alta qualidade, o que torna difícil construir uma boa amostra para qualquer mercado durante um período mínimo necessário. Alternativamente, Christoffersen (2003) utiliza a amplitude diária do logaritmo dos preços como *proxy* para previsões mais precisas da volatilidade diária. Uma vez que essa metodologia possui uma clara vantagem em mercados menos líquidos, ela também será empregada nesse trabalho.

Ghysels, Santa-Clara e Valkanov (2006) utilizam várias amostras de dados misturadas para avaliar o poder preditivo de modelos de volatilidade para várias formas de regressores, como retorno quadrado, retorno absoluto e amplitude do retorno, tanto para retornos diários quanto para intradiários. Segundo estes, surpreendentemente, o uso direto de dados de alta frequência não melhorou o exercício da previsão da volatilidade.

Além da classificação entre grupos de modelos, como sugerido por Poon e Granger (2003), existem formulações híbridas tais como o modelo de suavização exponencial adaptativo sobre o GARCH desenvolvido em Taylor (2004).

Outra possibilidade é o uso de modelos multivariados. Sadorsky (2006), no entanto, encontra resultados para contratos futuros de petróleo onde o uso de modelos como espaço de estados (VAR e GARCH bivariado) não supera a abordagem GARCH padrão.

#### 4. Metodologia

Esta seção apresenta uma breve descrição dos modelos utilizados no estudo, subdivididos em dois grupos: os modelos estatísticos de volatilidade histórica e os modelos volatilidade condicionada a heterocedasticidade.

Segundo Alexander (2001), modelos de volatilidade histórica tratam a volatilidade como o simples desvio-padrão dos retornos para  $t$  períodos. Sendo invariante no tempo, esses desvios-padrão referem-se apenas à volatilidade incondicional, ou seja, à raiz do parâmetro de variância de uma distribuição incondicional de um processo estacionário do retorno. Dessa forma, o termo volatilidade histórica é aplicado a previsões estatísticas, as quais são baseadas em médias móveis igualmente ponderadas. Contudo, de acordo com o levantamento feito por Poon e Granger (2003), enquadram-se nesta categoria todos os modelos que estimam a volatilidade diretamente, ou seja, omitindo a aderência das estimativas à distribuição dos retornos ou a qualquer outra variável, como por exemplo o preço de opções. Para estes autores, a fórmula geral dos modelos de volatilidade histórica é dada por:

$$\hat{\sigma}_t = \alpha_1 \sigma_{t-1} + \alpha_2 \sigma_{t-2} + \dots + \alpha_t \sigma_{t-t} \quad (1)$$

Portanto, classificam-se os modelos: passeio aleatório, média histórica, ARMA e várias formas de suavização que dependem de  $\alpha$ . Assim, diferentes previsões de volatilidade podem ser obtidas devido às várias formas de se calcular a volatilidade histórica e dos diferentes tamanhos de amostra de dados. Esses modelos são altamente dependentes da forma como são calculados, do período da amostra, da frequência dos dados e da presença de *outliers*.

O fenômeno de aglomeração de volatilidade levou, a partir do modelo ARCH de Engle (1982), ao desenvolvimento de modelos cujas volatilidades são autoregressivas condicionadas às volatilidades realizadas em períodos anteriores. Assim, modelagens tais como a família ARCH (*Autoregressive Conditional Heterocedasticity*) são capazes de controlar a heterocedasticidade da volatilidade.

Estes modelos partem de funções de retorno simples, geralmente  $r_t = \mu + \varepsilon_t$  (caso adotado neste artigo), sendo  $\mu$  o retorno médio e  $\varepsilon_t$  o retorno residual, com  $\varepsilon_t = \sqrt{\sigma_t} z_t$ , sendo  $\sigma_t$  a variância condicional e  $z_t$  o retorno residual padronizado ( $z_t \sim N(0,1)$ ), definindo a equação da média. A abordagem concentra-se então na variância condicional (a variância de uma distribuição condicional no tempo  $t$  que governa o retorno nesse mesmo instante), pois, uma vez que a variância incondicional é tida como constante,  $\text{var}(r_t | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots) = \text{var}(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$ . Se a variância de uma série temporal depende do passado, dizemos que a série é condicionalmente heterocedástica. Uma vez que  $E(\varepsilon_t) = 0$ , a variância condicional de  $\varepsilon_t^2$ , denotada  $\sigma_t^2$ , é representada por:

$$\sigma_t^2 = \text{var}(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) = E[(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t))^2 | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] = E[\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] \quad (2)$$

O último resultado estabelece que a variância condicional de uma variável aleatória  $\varepsilon_t$  com média zero é igual à esperança condicionada do quadrado de  $\varepsilon_t$ . Se a dependência em relação a valores passados pode ser expressa por uma média móvel, isto gera o modelo ARCH. A formulação geral atribuída a esse grupo por Brooks e Persaud (2003) é:

$$\sigma_t = \omega + \sum_{j=1}^p \alpha_j \sigma_{t-j} + \sum_{k=1}^q \beta_k \varepsilon_{t-k}^2 \quad (3)$$

Sendo  $\omega$  uma constante,  $p$  o número de termos autoregressivos e  $q$  o número de termos de média móveis.

Em sua forma completa, (3) corresponde à formulação do GARCH simétrico, inicialmente proposto por Bollerslev (1986). A modelagem GARCH, onde o EWMA e o ARCH são casos especiais, incorpora a dependência temporal na determinação das estimativas de volatilidade, permitindo ainda diversas variações, que podem captar, por exemplo, assimetrias na volatilidade e mudanças de regime<sup>3</sup>. Dessa forma, essa classe busca representar o comportamento autoregressivo (i.e., a dependência da volatilidade ao longo do tempo) de

<sup>3</sup> Uma introdução aos procedimentos básicos é apresentada em Brooks (2003) e desenvolvimentos mais elaborados em Enders (2004) e Tsay (2002).

variáveis que apresentam heterocedasticidade (variância não-constante), de onde vem o nome *GARCH* (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic*).

Já o modelo ARCH é uma abordagem pouco aplicada devido à necessidade de inclusão de várias defasagens e a capacidade do GARCH de modelar um processo ARCH infinito. Por isso, nesse trabalho avaliou-se apenas a forma mais simples do ARCH, pois uma análise da dos resíduos seguida da modelagem apropriada pode significar a adoção de um outro modelo, o que vai contra a proposta de teste de todos os modelos pra todos os ativos. O mesmo critério foi adotado para os demais modelos pertencentes a este grupo. Ressalta-se ainda o fato estilizado pela literatura a respeito, de que, o modelo GARCH não só é superior ao ARCH, como também, o GARCH (1,1), ou *vanilla* GARCH, apresenta maior desempenho em termos de previsão de curto prazo, dado a sua eficiência e parcimônia apesar da relativa simplicidade em relação às formas com mais defasagens.

Uma das restrições básicas dos modelos GARCH é que os mesmos consideram uma resposta simétrica da volatilidade a choques positivos e negativos. No entanto, a literatura mostra que choques negativos em séries financeiras tendem a gerar um aumento na volatilidade que é maior que um choque positivo de mesma magnitude. O que vai de acordo com o efeito de alavancagem mencionado no problema de pesquisa. Duas formulações exploradas em estudos empíricos que buscam incorporar estes efeitos são o modelo GJR ou TARCH de Glosten, Jagannathan e Runkle (1993) e o EGARCH (GARCH exponencial) de Nelson (1991). O quadro 1 a seguir apresenta as especificações dos modelos utilizados no estudo.

**Quadro 1 – Especificações Básicas dos Modelos de Previsão de Volatilidade**

Modelo	Equação para a previsão
Passeio Aleatório	$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = r_t^2$
Média Histórica	$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = (r_t^2 + r_{t-1}^2 + \dots + r_1^2)/t$
Média Móvel (a)	$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = (r_t^2 + r_{t-1}^2 + \dots + r_{t-(a-1)}^2)/a$
ARIMA	$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \omega + \sum_{i=0}^m \alpha_i \hat{\sigma}_{t-i}^2 + \sum_{i=0}^m \beta_i \varepsilon_{t-i}^2$
EWMA	$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \varepsilon_{t-1}^2$
ARCH (1)	$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2$
GARCH (1, 1)	$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \alpha_2 \sigma_t^2$
GJR (1,1)	$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \alpha_2 \sigma_t^2 + \alpha_3 I_t \varepsilon_t^2$
EGARCH (1, 1)	$\ln(\hat{\sigma}_{t+1}^2) = \alpha_1 + \alpha_2 \ln(\sigma_t^2) + \alpha_3 \left( \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{\sigma_t^2}} \right) + \alpha_4 \left( \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{\sigma_t^2}} - \sqrt{2/\pi} \right)$

Fonte: Elaboração dos autores.

No presente trabalho, foram utilizados os períodos de um ano, um mês e uma semana para a estimação dos modelos de média móvel. Para os demais períodos, utiliza-se 75% da amostra como base para a estimação dos parâmetros. Assim, aplica-se um procedimento de janela móvel a partir do qual se realiza a previsão dentro da amostra para todos os modelos, em paralelo aos demais 25% da amostra, que serão utilizados para comparar o desempenho preditivo dos modelos.

Cabe ressaltar ainda que o modelo de Médias Móveis Exponencialmente Ajustadas ou EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) é utilizado como modelo de suavização. Este é um procedimento relativamente simples e cuja metodologia VaR desenvolvida pelo RiskMetrics<sup>TM</sup> utiliza uma estimativa de 0,94 para o parâmetro, sendo amplamente aplicado no mercado. Esta abordagem permite que a volatilidade varie de um período para o outro, incorporando movimentos de mercado de modo mais rápido que a medida tradicional expressa pelo desvio-padrão. No entanto, neste estudo, o peso  $\lambda$  foi estimado por Máxima Verossimilhança de modo a minimizar o erro entre a previsão e as volatilidades observadas dentro da amostra de interesse. Já para a estimação do modelo ARIMA, recorreu-se à metodologia de Box & Jenkins (1976) para a amostra inicial no procedimento de janela móvel.

#### 4.2- Critério de Avaliação do Desempenho Preditivo

A medida de erro de previsão a ser utilizada como critério de avaliação do desempenho preditivo dos modelos é a Raiz do Erro Quadrado Médio (RMSE), proposta como referência de análise por Tsay (2002) e Brooks (2002), e que é definida formalmente por:

$$RMSE = \sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} (\hat{y}_t - y_t)^2 / h} \quad (4)$$

Sendo que  $\hat{y}_t$  é o valor previsto no tempo  $t$ ;  $y_t$  é o valor observado no tempo  $t$ ; e  $h$  é o número de observações diárias previstas à frente. Essa medida, como afirma Andersen e Bollerslev (1998) é a medida mais empregada na literatura a respeito para a avaliação da previsão de volatilidade. A busca pela melhor forma de avaliação consiste num ramo próprio de discussão na literatura especializada<sup>4</sup>.

#### 4.3- Dados

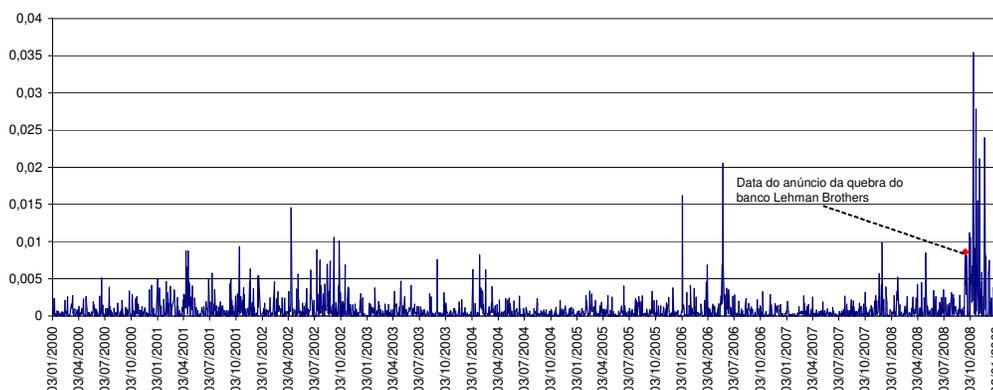
Para a consecução dos objetivos do presente estudo, foram coletados dados referentes às cotações de fechamento diárias de uma amostra intencional de empresas listadas na Bovespa, a partir da base de dados Economática<sup>®</sup>. Foram selecionados os ativos com maior participação no índice Ibovespa, além do próprio índice. Além disso, foram excluídos os ativos com pelo menos dois dias sem negociação. Restaram então os seguintes ativos: AMBV4, ARCZ6,

<sup>4</sup> Para avaliações mais precisas, veja, por exemplo, Diebold e Mariano (1995).

BBDC4, BBAS3, BRTP3, BRTP4, BRTO4, BRKM5, CLSC6, CMIG4, CGAS5, CPLE6, ELET3, ELET6, EMBR3, GGBR4, GOAU4, ITAU4, ITSA4, KLBN4, LIGT3, LAME4, NETC4, PCAR4, PETR3, PETR4, SBSP3, SDIA4, CSNA3, CRUZ3, TNLP3, TNLP4, TLPP4, TCSL3, TCSL4, TRPL4, USIM5, VCPA4, VALE3, VALE5, VIVO4 e o próprio índice Ibovespa (IBOV). O período de análise envolve o retorno e a volatilidade diária dos ativos entre 1/1/2000 e 31/01/2008, com a aplicação de uma janela de 1572 (75%) observações para análise do desempenho preditivo dos modelos, utilizando o software Stata<sup>®</sup> 10.1.

A análise é realizada não só para toda a amostra, como também para duas partes da mesma em separado. Essa partição é realizada para avaliar não só a capacidade de ajuste do modelo para períodos de alta volatilidade, mas também para capacidade de ajuste dos mesmos a rápidas mudanças no contexto volátil do mercado. Como marco para a divisão das subamostras, recorreu-se à data da notícia de quebra do banco Lehman Brothers (16 de setembro de 2008). A figura a seguir torna clara a mudança do padrão de volatilidade após esta data.

Figura 1 - Volatilidade do Ibovespa - Jan/2000 a Jan/2009



Fonte: Adaptado a partir de dados extraídos da base Econômica.

## 5. Análise dos Resultados

A análise dos resultados toma por base o *back testing* dos modelos, ou seja, as previsões de volatilidade fornecidas pelas estimativas no procedimento de janela móvel foram comparadas com as volatilidades observadas para cada dia.

Cabe ressaltar ainda que grande parte dos trabalhos realiza a análise para séries de índices de mercado tais como o S&P 500 e o índice Dow Jones, os quais são interpretados como *proxies* para o mercado como um todo, tornando assim possível comparar o desempenho geral dos modelos. Já no presente trabalho, o desempenho dos modelos é avaliado tanto relação ao índice de mercado (Ibovespa) quanto ao desempenho médio dos modelos dentro da amostra de 41 ativos selecionados. A segunda forma de avaliação é utilizada por melhor se aproximar do objetivo de generalização do desempenho preditivo dos modelos. Para tanto, adotou-se o RMSE como critério de desempenho preditivo.

A tabela 1 abaixo sintetiza os resultados obtidos, apresentando as médias das medidas de erro de previsão dos modelos estudados para cada um dos ativos listados, além dos resultados obtidos para a série do Ibovespa.

**Tabela 1 – Desempenho preditivo dos modelos analisados**

Modelo	Amostra Total		Parte 1		Parte 2	
	Médio	Ibovespa	Médio	Ibovespa	Médio	Ibovespa
<b>Passeio Aleatório</b>	3.428E-03	2.199E-03	1.547E-03	7.382E-04	7.427E-03	5.097E-03
<b>Média Histórica</b>	2.653E-03	1.718E-03	1.174E-03	5.502E-04	5.770E-03	4.000E-03
<b>Média Anual</b>	2.586E-03	1.660E-03	1.144E-03	5.485E-04	5.633E-03	3.854E-03
<b>Média Mensal</b>	2.483E-03	1.514E-03	1.150E-03	5.579E-04	5.348E-03	3.472E-03
<b>Média Semanal</b>	2.606E-03	1.576E-03	1.206E-03	5.663E-04	5.609E-03	3.626E-03
<b>ARIMA</b>	2.794E-03	1.726E-03	1.299E-03	5.487E-04	5.996E-03	4.021E-03
<b>EWMA</b>	2.482E-03**	1.502E-03**	1.136E-03*	5.475E-04	5.364E-03	3.448E-03**
<b>ARCH</b>	2.590E-03	1.635E-03	1.163E-03	5.474E-04	5.618E-03	3.791E-03
<b>GARCH</b>	2.474E-03*	1.504E-03	1.137E-03**	5.433E-04	5.336E-03	3.458E-03
<b>GJR</b>	2.488E-03	1.497E-03*	1.173E-03	5.346E-04**	5.310E-03**	3.446E-03*
<b>EGARCH</b>	2.633E-03	1.530E-03	1.347E-03	5.230E-04*	5.296E-03*	3.538E-03

Legenda: \* - Menor RMSE; \*\* - 2º Menor RMSE.

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Os resultados obtidos demonstram a superioridade dos modelos paramétricos - sejam estes os estimados pela abordagem histórica ou pela abordagem condicional - em relação ao modelo de passeio aleatório, que apresentou o pior desempenho preditivo no período. Numa visão geral, o modelo EWMA apresenta bons resultados preditivos para o horizonte de 1 dia na maioria das categorias amostrais analisadas. Deve-se observar, no entanto, que estes resultados são similares aos do *vanilla* GARCH, o que impede estabelecer uma relação de superioridade entre ambos. Observa-se ainda a superioridade destes em relação à estimação da média histórica, o que demonstra a ineficiência do critério de ponderar igualmente todas as observações na estimação da volatilidade, não importando o quão distante uma observação esteja da data de estimação. Tal resultado está associado à já conhecida autocorrelação positiva da variância (um dos fatos estilizados das séries financeiras), associados a agrupamentos (*clusters*) de volatilidade.

Quando se avalia a série do Ibovespa, a comparação do desempenho preditivo expõe a relativa superioridade do modelo EGARCH e, principalmente, do modelo GJR revelando que outro fato estilizado – o efeito alavancagem – o qual é associado a uma assimetria negativa na série dos retornos ao quadrado, influencia nos resultados dos modelos de previsão de volatilidade. Porém, quando a avaliação é feita em termos da média dos demais ativos, este último resultado não é passível de generalização. Isso indica que, apesar da característica de assimetria negativa das séries de ativos como um todo, a aplicação, indiferente do período de análise e do ativo em questão, de modelos para séries assimétricas pode ser penalizada de tal forma que a aplicação de modelos mais simples apresentem resultados generalizados mais consistentes.

Um último ponto quanto ao desempenho dos modelos que captam a assimetria negativa das séries está associado à aplicação dos mesmos em períodos mais voláteis. A análise dos resultados para a sub-amostra pós quebra do Banco Lehman Brothers indica bons resultados para os modelos EGARCH e GJR, não só para a série do Ibovespa como também, de forma generalizada, para os demais ativos.

Como resultado geral – analisando-se a amostra como um todo – observa-se também um bom desempenho dos modelos condicionados, aí incluídos os modelos que baseiam sua especificação na dinâmica de curto prazo – tais como os modelos EWMA e GARCH (1,1) além dos já citados modelos GJR e EGARCH – sendo estes últimos os mais adequados para períodos de alta instabilidade nas cotações dos ativos analisados, aspecto relevante para gestores de risco e agentes do mercado financeiro que necessitam de projeções da volatilidade para o gerenciamento de suas posições no mercado.

## 6. Conclusão

Diante da diversidade de resultados na literatura no que tange ao desempenho de modelos de previsão de volatilidade, o presente estudo apresenta algumas contribuições à avaliação da aplicação de modelos de volatilidade condicionada no mercado brasileiro. Em períodos de alta volatilidade, observa-se um bom desempenho do modelo GJR devido à sua capacidade de captar o efeito da alavancagem na volatilidade como já destacado na literatura. O modelo EGARCH também apresentou bons resultados, mas sem diferença estatística relevante em relação ao primeiro. Já os modelos GARCH (1,1) e EWMA apresentaram desempenho equivalente aos dois anteriormente destacados, em especial no período completo, onde a influência da correlação serial de primeira ordem se mostra mais relevante.

No presente trabalho, foram avaliados de forma generalizada os modelos mais utilizados no mercado e no meio acadêmico para a previsão de volatilidade. No entanto, ainda há outros modelos que não foram abordados que podem ser objeto de pesquisas futuras. Como exemplo, destacam-se os modelos de volatilidade implícita, os quais apresentam resultados interessantes, tal como destacado por Poon e Granger (2003). Adicionalmente, a aplicação das projeções de volatilidade em contextos tais como o gerenciamento de risco em posições de renda variável e derivativos abre espaço para novas formas de avaliação do desempenho preditivo dos modelos e, conseqüentemente, novos estudos relacionados ao tema no Brasil.

## 7. Bibliografia

ALEXANDER, C. *Market models: a guide to financial data analysis*. New York, Wiley, 2001.

ANDERSEN, T. G.; BOLLERSLEV, T. Answering the skeptics: yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. In.: *International Economic Review*, v. 39, n. 4, p. 885-905, 1998.

- ANDERSEN, T. G.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F.X.; LABYS, P. Modeling and forecasting realized volatility. In.: *Econometrica*, v.71, n. 2, p. 579-625, 2003.
- ANDERSEN, T. G.; BOLLERSLEV, T.; MEDDAHI, N. Correcting the errors: a note on volatility forecast evaluation based on high-frequency data and realized volatilities. In.: *Econometrica*, v. 73, n. 1, p. 279-296, 2005.
- ANDERSEN, T. G.; BOLLERSLEV, T.; CHRISTOFFERSEN, P. F.; DIEBOLD, F. X. *Volatility and correlation forecasting*. In.: ELLIOT, G.; GRANGER, C. W. J.; TIMMERMAN, A. *Handbook of economic forecasting*, Amsterdam: Nosth-Holland, p. 778-878, 2006.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. In.: *Journal of Econometrics*, v. 31, n.3, p.307-327, 1986.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. *Time series analysis: forecasting and control*. San Francisco: Holden Day, 1976.
- BROOKS, C. *Introductory econometrics for finance*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- BROOKS, C.; PERSAND, G. Volatility forecasting for risk management. In.: *Journal of Forecasting*, v. 22, n. 1, p. 1– 22, 2003.
- CHERNOV, M. On the role of volatility risk premia in implied volatilities based forecasting regressions. Manuscrito não publicado, Columbia University, 2002.
- CHRISTOFFERSEN, P. F.; DIEBOLD, F. X. How relevant is volatility forecasting for financial risk management? In.: *Review of Economics and Statistics*, v. 82, n.1, p. 12-22, 2000.
- CHRISTOFFERSEN, P. F. *Elements of financial risk management*. Academic Press, Elsevier Science, 2003.
- DIEBOLD, F. X.; MARIANO, R. S. Comparing predictive accuracy. In.: *Journal of Business & Economic Statistics*, v. 13, n. 3, p. 253-263, 1995.
- ENDERS, W. *Applied econometric time series*. John Wiley & Sons, 2004.
- ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. In.: *Econometrica*, v. 50, n. 4, p. 987-1007, 1982.
- FIGLEWSKI, S. Forecasting volatility. In.: *Financial Markets, Institutions and Instrumentes*, v. 6, n. 1, p. 1-88, 1997.
- FRENNBERG, P.; HANSSON, B. An evaluation of alternative models for predicting stock volatility. Evidence from a Small Market. In.: *Journal of International Markets, Institutions and Money*, v. 5, n. 2-3, p. 117-134, 1995.

- GHYSELS, E.; SANTA-CLARA, P.; VALKANOV, R. Predicting volatility: getting the most out of return data sampled at different frequencies. In.: *Journal of Econometrics*, v. 131, n. 1-2, p. 59-95, 2006.
- GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On the relation between expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. In.: *Journal of Finance*, v. 48 n. 5, p. 1779-1801, 1993.
- MANDELBROT, B. The stable paretian income distribution when apparent exponent is near two. In.: *International Economic Review IV*, p. 111-14, 1963.
- NEELY, C. J. Forecasting foreign exchange volatility: why is implied volatility biased and inefficient? And does it matter? In.: *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, v. 19, n. 1 p. 188-205, 2009.
- NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. In.: *Econometrica*, v. 59, n.2, p. 347-370, 1991.
- POON, S. H.; GRANGER, C. W. J. Forecasting volatility in financial markets: a review. In.: *Journal of Economic Literature*, v. 41, n.2, 2003.
- \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_. Practical issues in forecasting volatility. In.: *Financial Analyst Journal*, v. 61, n.1, 2005.
- POTESHMAN, A. M. Forecasting future volatility from options prices. Manuscrito não publicado, Department of Finance, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2000.
- SADORSKY, P. Stochastic volatility forecasting and risk management. In.: *Applied Financial Economics*, v. 15, p. 121-135, 2005.
- SADORSKY, P. Modeling and forecasting petroleum futures volatility. In.: *Energy Economics*, v.28, n. 4, p. 467-488, 2006.
- TAYLOR, J. W. Volatility forecasting with smooth transition exponential smoothing. In.: *International Journal of Forecasting*, v. 20, p. 273-286, 2004.
- TSAY, R. S. *Analysis of financial time series*. New York: John Wiley & Sons, 2002.