

Área Temática: Finanças

Título: Análise de Componentes Principais na Correlação da Volatilidade Implícita com o Ativo Objeto

AUTORES

ANDRÉ GNECCO AVELAR

Universidade de São Paulo

andreavelar@yahoo.com

OSWALDO LUIZ DO VALLE COSTA

Universidade de São Paulo

oswaldo@lac.usp.br

Resumo: Como a volatilidade é a única variável não observada nas fórmulas padrão de precificação de opções, o mercado financeiro utiliza amplamente o conceito de volatilidade implícita, isto é, a volatilidade que ao ser aplicada na fórmula de precificação resulte no preço correto (observado) das opções negociadas.

Por isso, entender como as volatilidades implícitas das diversas opções de dólar negociadas na BM&F, o objeto de nosso estudo, variam ao longo do tempo e como estas se relacionam é importante para a análise de risco de carteiras de opções de dólar/real bem como para o apreçamento de derivativos cambiais exóticos ou pouco líquidos.

A proposta de nosso estudo é, portanto, verificar se a observação da literatura técnica realizada em diversos mercados também é válida para as opções de dólar negociadas na BM&F: que há uma relação entre as variações das volatilidades implícitas e as variações do valor do ativo objeto.

Para alcançar este objetivo, aplicaremos a análise de componentes principais em nosso estudo. Com esta metodologia, reduziremos as variáveis aleatórias que representam o processo das volatilidades implícitas em um número menor de variáveis ortogonais, facilitando a análise dos dados obtidos.

Palavras chave: Engenharia financeira. Superfície de volatilidade implícita. Análise de componentes principais.

Abstract: Volatility is the only unobserved variable in the standard option pricing formulas and hence implied volatility is a concept widely adopted by the financial market, meaning the volatility which would make the formula yield the option's real market price.

Therefore, understanding how the implied volatility of the options on dollar traded at BM&F, the subject of our study, vary over time is important for risk analysis over dollar option books and for pricing of exotic or illiquid derivatives

Our work's proposal is to verify if the observations made by the technical literature over several markets could also be applied to the options on dollar traded at BM&F: that there is a relation between this variation and the variation of the underlying asset price.

In order to fulfill these goals, we will apply principal component analysis in our study. This methodology will help us analyze the data by reducing the number of variables that represent the implied volatility process into a few orthogonal variables.

Keywords: Financial engineering. Implied volatility surface. Principal Component Analysis.

1 - Motivação

Ao calcular-se a volatilidade implícita de todos os contratos de opções sobre um mesmo ativo objeto negociados em um dia, vê-se claramente que há vários níveis diferentes de volatilidade implícita, destacando-se principalmente o efeito “smile”, em que opções com strike muito distante do preço do ativo objeto possuem volatilidade implícita maior que as demais (DUPIRE, 1993; DERMAN; KANI, 1994). Como este efeito não é previsto pelo modelo de Black-Scholes, e seus derivados, conclui-se que há erros de observação e falhas no modelo.

Graças à simplicidade e ampla adoção do modelo de Black-Scholes e seus derivados, as volatilidades implícitas são estudadas por permitirem o controle de risco e posicionamento em carteiras de opções bem como apreçar opções sem liquidez, sejam *vanillas* ou exóticas, em que a volatilidade implícita é a variável de entrada para os diversos modelos utilizados pelo mercado. Em carteiras com opções, a volatilidade implícita é o segundo fator de risco mais importante, sendo o primeiro a variação no preço do ativo, contra a qual o investidor pode facilmente se proteger. Como este fator de risco é diferente para cada contrato de opção negociado, torna-se importante entender como a volatilidade implícita de cada contrato varia com o tempo e qual a relação entre estas variações.

Assim, o estudo da variação das volatilidades implícitas no tempo é de grande utilidade prática, permitindo controlar o risco e retorno de carteiras de opções (sobre o mesmo ativo objeto) com diversos strikes e maturidades bem como precificar opções exóticas ou ilíquidas. Para alcançar este objetivo, uma das ferramentas mais comuns é a superfície de volatilidade, na qual mostra-se a volatilidade implícita em todos os pontos do espaço {Strike/Preço x Maturidade} e não apenas dos pontos onde há contratos negociados.

Como há diversas volatilidades implícitas para cada dia de negócio, estaremos tratando com uma variável multidimensional. De modo a facilitar nosso estudo, utilizaremos a análise de componentes principais. Com esta metodologia aplica-se uma transformação linear reduzindo a quantidade das variáveis analisadas em variáveis ortogonais que mantém o máximo de variância do processo original.

2 - Revisão Bibliográfica e Metodologia

Com o objetivo de entendermos o comportamento da superfície de volatilidade das opções de dólar/real ao longo do tempo, iremos estudar se a variação diária da superfície é correlacionada com a variação do preço do ativo objeto, ΔS . Esta propriedade já foi analisada

pela literatura em superfícies de volatilidade de outros mercados (DAX, S&P e FTSE) e pretendemos comparar como seus resultados se refletem para as opções de dólar/real.

Skiadopoulos; Hodges e Clewlow (2000), organizaram as variações diárias das volatilidades implícitas das diversas opções observadas em um dia em faixas de diferentes maturidades (tempo para o vencimento). Os autores aplicaram a técnica de análise de componentes principais e então analisaram a correlação da superfície de volatilidade com a variação do preço futuro do ativo, o índice S&P500, concluindo que o nível de volatilidade implícita aumenta quando há queda no valor do ativo objeto.

Cont e Fonseca (2002) se propuseram a analisar a correlação entre as variações da superfície de volatilidade e as variações no valor do ativo objeto para dois mercados diferentes, o S&P500 e FTSE1000. Os autores utilizaram o método não-paramétrico de interpolação de estimador de Kernel, que será apresentado adiante, para criar a superfície e obter sua diferença e sobre esta diferença aplicaram uma variante do método de análise de componentes principais. Sua conclusão é que há, para os dois mercados, correlação razoavelmente significativa entre os parâmetros da decomposição da superfície de volatilidade e a variação do valor ativo objeto.

2.1 - Cálculo das Volatilidades Implícitas

Para o cálculo das volatilidades implícitas, vamos utilizar uma variação do modelo de Black-Scholes, o modelo de Black (1976) utilizado no mercado para a precificação das opções de dólar, que tem premissas semelhantes ao do modelo de Black-Scholes, mas trabalha com o preço futuro do ativo objeto, evitando assim o problema de definir qual a taxa de juros livre de risco do dólar. O modelo determina o preço de uma opção de compra europeia que vence em um tempo τ ($\tau = T - t$) com a seguinte fórmula:

$$C(F_t, K, \tau, \sigma, r) = e^{-r\tau} [F_t \cdot \varphi(d_1) - K \cdot \varphi(d_2)] \quad (2.1)$$

$$\text{Com: } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_t}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Sendo:

- $C(\cdot)$ = preço da opção de compra
- F_t = preço futuro do ativo objeto
- K = preço de exercício ou strike
- T = data de exercício da opção
- t = instante de negociação
- $\tau = T - t$ = maturidade
- σ = volatilidade do ativo objetivo
- r = taxa de juros sem risco

$\varphi(\cdot)$ = função normal cumulativa padrão.

De acordo com a paridade entre opções de compra e venda, o preço de uma opção de venda é obtida como:

$$P(F_t, K, \tau, \sigma, r) = e^{-r\tau} \cdot [K \cdot \varphi(-d_2) - F_t \varphi(-d_1)] \quad (2.2)$$

A seguir, para obter a volatilidade implícita, aplica-se o método de Newton-Raphson sobre a função $f(\sigma) = C(\sigma) - C_{obs}$ (no caso das opções de compra).

2.2 - Interpolação da Superfície de Volatilidade

Uma superfície de volatilidade implícita de opções é a representação em um dado instante de tempo, das volatilidades implícitas nos preços das opções negociadas no mercado naquele instante, em função das variáveis maturidade e moneyness.

Como as opções negociadas não são as mesmas ao longo dos dias e com a passagem de um dia útil e a mudança do dólar spot, temos observações diárias diferentes na superfície de volatilidade. Por isso, faremos a interpolação de uma superfície a cada dia de negócio para comparar a variação das volatilidades implícitas no tempo, o que significa calcular a volatilidade implícita de opções não negociadas.

Aplicaremos a metodologia de estimador de Kernel, aplicada por diversos autores (AÏT-SAHALIA; LO, 2000, CONT; FONSECA, 2002, FENGLER; WANG, 2003) para interpolação das volatilidades implícitas observadas em um dia de negócio. Trata-se de um método não paramétrico de interpolação que faz uma média ponderada dos pontos observados em função da distância nas dimensões de moneyness e maturidade.

$$\hat{\sigma}_t^{imp}(m, \tau) = \frac{\sum_{i=1}^{L_t} \sigma_t^{imp}(m_{i,t}, \tau_{i,t}) \cdot g\left(\frac{m - m_{i,t}}{h_m}\right) \cdot g\left(\frac{\tau - \tau_{i,t}}{h_\tau}\right)}{\sum_{i=1}^{L_t} g\left(\frac{m - m_{i,t}}{h_m}\right) \cdot g\left(\frac{\tau - \tau_{i,t}}{h_\tau}\right)} \quad (2.3)$$

Com:

m = coordenada de moneyness (strike / valor do ativo) do ponto a ser interpolado

τ = coordenada de maturidade do ponto a ser interpolado

$\hat{\sigma}_t^{imp}(m, \tau)$ = volatilidade implícita estimada pela interpolação no tempo t nas

coordenadas $\{m, \tau\}$

L_t = quantidade de opções observadas no dia t

$\sigma_t^{imp}(m_{i,t}, \tau_{i,t})$ = volatilidade implícita da i -ésima opção observada no dia t .

$m_{i,t}$ = moneyness da i -ésima opção observada no dia t

$\tau_{i,t}$ = maturidade da i -ésima opção observada no dia t

h_m = ajuste de escala da dimensão moneyness

h_τ = ajuste de escala da dimensão maturidade

$g(\cdot)$ = função peso (função Kernel), em nosso caso, utilizamos a função gaussiana:

$g(u) = (2\pi)^{-0.5} \exp(-u^2/2)$, como em Cont e Fonseca (2002).

Dado que trabalharemos no domínio discreto, iremos interpolar a volatilidade implícita apenas para algumas coordenadas de moneyness e maturidades específicas, sobre as quais se dará a sequência do estudo e assim resolvemos o problema das opções negociadas em dias consecutivos não possuírem as mesmas coordenadas de moneyness e maturidade. Teremos, portanto, um conjunto de coordenadas de moneyness e um conjunto de coordenadas de maturidade, mas de modo a simplificar a referência a estes pontos, iremos alinhar estas coordenadas em um único vetor, $\hat{\sigma}_t^{\text{imp}}$, com M pontos.

2.3 - Metodologia da Análise de Componentes Principais

Considere B uma variável aleatória com dimensão M de momento centrado zero, ou seja, de esperança nula. É possível decompor B do seguinte modo:

$$B = Q^{1/2} \cdot U \quad (2.4)$$

A variável aleatória U também possui dimensão M e Q é a matriz de covariância de B, quadrada positiva definida, sobre a qual faremos a decomposição em autovalores e autovetores:

$$Q = L \cdot D \cdot L' \quad (2.5)$$

A matriz L é composta pelos autovetores de $Q = \{v_1, \dots, v_M\}$ e D a matriz diagonal com os respectivos autovalores $= \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$. Os autovetores v_i são ortonormais e compõe uma base para o \mathbf{R}^N . Assim, Q e B podem ser representados do seguinte modo:

$$Q = \sum_{i=1}^M \lambda_i \cdot v_i \cdot v_i' \Rightarrow B = \sum_{i=1}^M \lambda_i^{1/2} \cdot v_i \cdot v_i' \cdot U = \sum_{i=1}^M z_i \cdot v_i \quad (2.6)$$

Onde $z_i = \lambda_i^{1/2} \cdot v_i' \cdot U$ é uma variável aleatória, projeção de B em v_i . Algumas propriedades importantes das variáveis z_i : possuem média nula, variância λ_i e sua covariância é nula.

O próximo passo na metodologia é aproximar o processo B por um processo $\tilde{B}(N)$, representação de B em uma base de dimensão reduzida (dimensão N). Devemos minimizar a dimensão N, com a restrição de um R-quadrado mínimo, dado, de $\tilde{B}(N)$ em relação à B. Para isso, $\tilde{B}(N)$ deve conter os autovetores com maiores autovalores em quantidade suficiente para garantir este R-quadrado dado.

2.4 - Decomposição da variação diária da superfície

Sobre os valores obtidos com a com a superfície de volatilidade construída ao longo de T dias, iremos utilizar o método de análise de componentes principais. Num dia t, observamos a variação da superfície de volatilidade implícita nos M pontos interpolados, dados pelo vetor coluna $\Delta\hat{\sigma}_t^{imp}$:

$$\Delta\sigma_t^{imp} = \hat{\sigma}_{t+1}^{imp} - \hat{\sigma}_t^{imp} \quad (2.7)$$

Vamos chamar de $\Delta\sigma^{imp}$ a variável aleatória que representa este processo observado de variação da superfície de volatilidade. A partir desta variável, criamos outra variável aleatória de dimensão M e média nula, sobre a qual aplicaremos a metodologia de componentes principais já apresentada:

$$B = \Delta\sigma^{imp} - E(\Delta\sigma^{imp}) \quad (2.8)$$

Chamaremos de β a matriz de dimensões M x (T-1), contendo as T-1 realizações observadas da variável aleatória B, M-dimensional. A matriz de covariância Q é estimada a partir de β :

$$Q = cov(B) = \beta \cdot \beta' / ((T - 1) - 1) \quad (2.9)$$

Com:

Q = matriz de covariância de B (variação centrada da superfície de volatilidade)

β = matriz M x (T-1) com as realizações de B

Em seguida, são obtidos os autovetores e autovalores de Q ($\{v_1, \dots, v_M\}$ e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$ respectivamente). As T-1 realizações de z_i , projeção de B em v_i , serão representadas pelas variáveis ζ_i (zeta), obtidas do seguinte modo:

$$\zeta_i = v_i' \cdot \beta \quad (2.10)$$

Portanto, a variação centrada da superfície de volatilidade em um dia t qualquer pode ser representada como:

$$\tilde{\beta}_t(N) = \sum_{i=1}^N \zeta_i(t) \cdot v_i \quad (2.11)$$

Com:

$\tilde{\beta}_t(N)$ = vetor M-dimensional representando a variação centrada da superfície de volatilidade implícita

$\zeta_i(t)$ = realização da variável z_i no instante t

v_i = i-ésimo autovetor de B

A partir de $\tilde{B}(N)$, representação N-dimensional da variação centrada da superfície de volatilidade implícita, iremos calcular qual a relação deste processo com a variação do valor do ativo objeto.

2.5 - Análise da correlação entre as variações da superfície de volatilidade e as variações do valor do ativo objeto:

Iremos agora estudar se há correlação entre os movimentos da superfície e a variação do ativo objeto, o dólar spot.

Dado o espaço de probabilidades padrão (Ω, F, P) , a cada dia t teremos uma realização ω da variação da superfície de volatilidade implícita que, pela metodologia exposta na seção anterior, é representada pela variável aleatória N -dimensional $\tilde{B}(N)$. Também teremos, a cada dia, uma realização da variação do dólar spot, ΔS .

Para verificar a correlação entre as variáveis, também trabalharemos com a variação centrada do dólar spot:

$$\Delta S_c = \Delta S - \Delta \bar{S} \quad (2.12)$$

Sendo:

ΔS = variável aleatória da variação diária do dólar spot

$\Delta \bar{S}$ = esperança da variação do dólar spot, estimada pela média das observações

Nossa análise será a norma da covariância de ΔS_c com $\tilde{B}(N)$, representação da variação (centrada) da superfície segundo a base N -dimensional $\{v_1, \dots, v_N\}$. A fórmula utilizada é:

$$\frac{\|\text{cov}(\tilde{B}, \Delta S_c)\|}{\|\sqrt{\text{var}(\tilde{B})}\| \cdot \|\sqrt{\text{var}(\Delta S_c)}\|} = \frac{\sum_{i=1}^N |E(z_i \cdot \Delta S_c)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \cdot \sqrt{\text{var}(\Delta S_c)}} \quad (2.13)$$

Com:

z_i = variável aleatória obtida pela projeção de B no vetor v_i

λ_i = autovalor referente ao vetor v_i , i -ésimo autovetor de Q ($Q = \text{cov}(B)$)

Este é um índice que varia de 0 à 1, indicando qual a relação linear entre \tilde{B} e ΔS_c e seu sentido. Se obtivermos um índice próximo a 1, isso significa que as duas variáveis são correlacionadas. Inversamente, caso o índice estiver próximo a 0, podemos concluir que as variáveis são descorrelacionadas.

Os estimadores utilizados são:

$$E(z_i \cdot \Delta S_c) = \Delta S_c^R \cdot \zeta_i' / ((T-1)-1) \quad (2.14)$$

$$\text{var}(\Delta S_c) = \Delta S_c^R \cdot \Delta S_c^R' / ((T-1)-1) \quad (2.15)$$

Com:

ζ_i = vetor-coluna com as $T-1$ realizações da variável z_i

ΔS_c^R = vetor-coluna com as $T-1$ realizações da variável aleatória ΔS_c

3 – Dados utilizados e resultados obtidos

Apresentamos agora a aplicação prática da teoria descrita anteriormente, sobre o mercado brasileiro, mas especificamente a BM&F, de opções dólar/real.

3.1 – Dados e Parâmetros Utilizados

Em nosso estudo, analisamos as opções de dólar/real negociadas na BM&F desde o dia 01/fev/2007 até o dia 06/jan/2009, que representam 485 dias de negócios. Em média, para cada dia, observam-se 23 opções negociadas, mas após descartarmos as opções cujas volatilidades implícitas fossem abaixo de zero, com maturidades menores que 5 dias e com preço abaixo do limite mínimo teórico de uma opção, ficamos com uma média de 16 opções em cada dia.

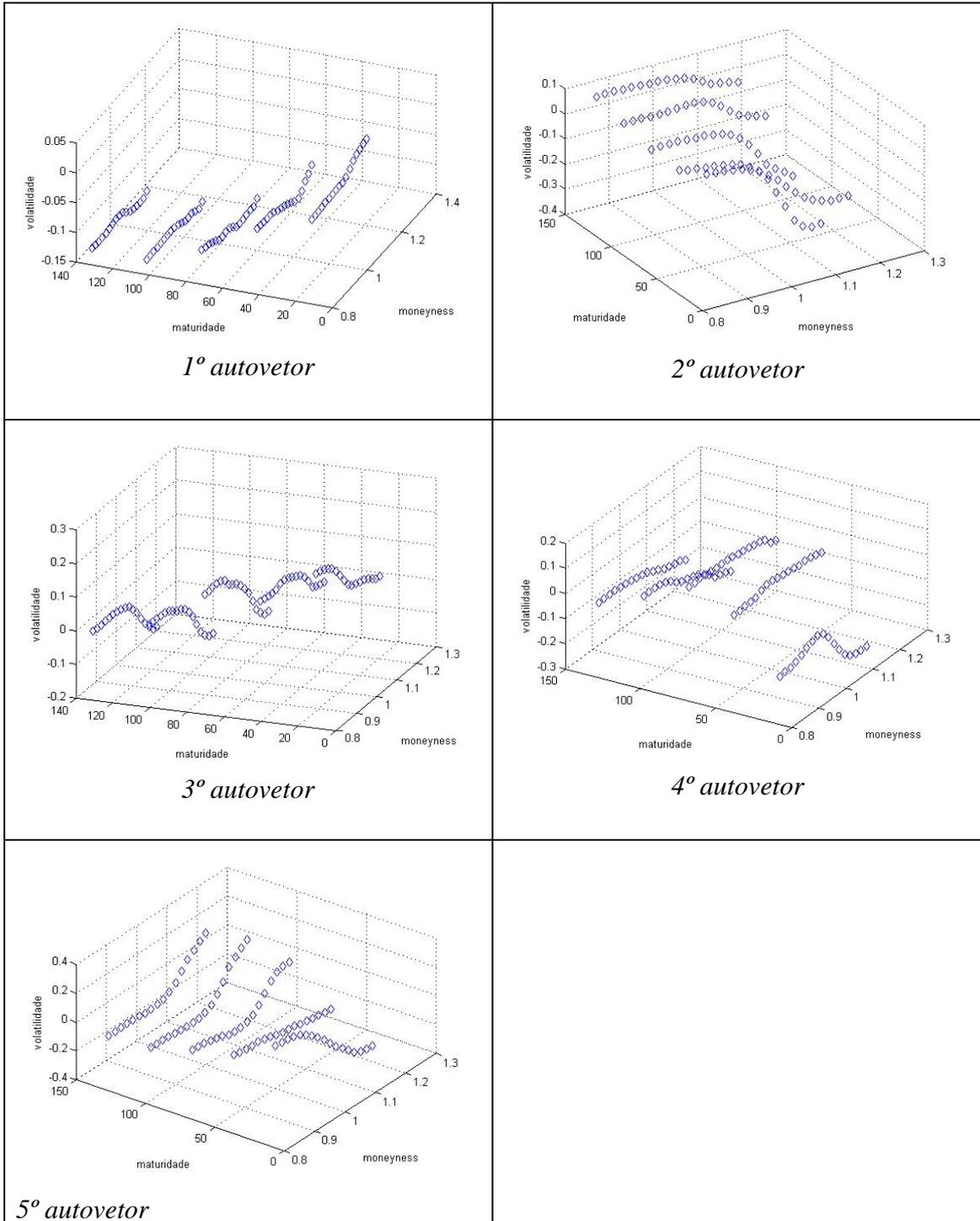
Na interpolação, utilizamos a função peso gaussiana com parâmetros $h_m = 0.001$ e $h_\tau = 20$ dias. Estes parâmetros são os que, empiricamente, resultaram em interpolações mais adequadas. As coordenadas onde faremos as interpolações cobrem, equidistantemente, as coordenadas com mais negócios realizados. Tratam-se de maturidades até 180 dias e moneyness ao redor de 1. Assim, definimos:

- Coordenadas de Moneyness = $\{0,84 ; 0,86 ; 0,88 ; \dots ; 1,12 ; 1,14 ; 1,16\}$, $L_m = 17$
- Coordenadas de Maturidade (dias) = $\{15; 45; 75; 105; 145\}$, $L_\tau = 5$

gerando um total de $17 \times 5 = 85$ pontos de interpolação ($M=85$).

3.2 – Dados Obtidos

Após o cálculo das volatilidades implícitas e de sua interpolação, prosseguimos com a análise de componentes principais. Utilizando os cinco primeiros autovetores como base para representar o processo de variação da superfície de volatilidade chegamos a um R-quadrado de 75%. Assim, reduzimos o processo de 85 dimensões, ou 85 pontos discretos, para apenas 5 ($N=5$). Estes autovetores representando-os nas suas coordenadas de moneyness e maturidade são apresentados a seguir:



Os parâmetros z_i , projeções de B (variação centrada da superfície de volatilidade) nos autovetores v_i , que na metodologia representamos por ζ_i , possuem a seguinte matriz de covariância dos parâmetros z_i :

0,0933	-0,0000	-0,0000	0,0000	-0,0000
-0,0000	0,0360	0,0000	-0,0000	0,0000
-0,0000	0,0000	0,0271	-0,0000	-0,0000
0,0000	-0,0000	-0,0000	0,0200	-0,0000
-0,0000	0,0000	-0,0000	-0,0000	0,0172

Conforme esperado de acordo com a metodologia de análise de componentes principais, os parâmetros apresentam variância decrescente e não são correlacionados.

3.3 – Resultados

Cumprindo com o objetivo de nosso trabalho, estimamos o índice de covariância normalizado entre as variações da superfície de volatilidade implícita das opções de dólar e as variações do valor do dólar spot e obtivemos o valor de 0,3358. Se o índice estivesse próximo a 1, seu valor máximo, concluiríamos que há grande correlação linear entre as variações da superfície de volatilidade e as variações do ativo objeto. Um índice próximo à zero nos levaria a concluir que as variáveis são descorrelacionadas. O valor obtido indica que há uma correlação linear não muito forte entre as variações da superfícies de volatilidade de dólar e as variações do ativo objeto (dólar spot).

4 - Conclusão

Observando as opções européias de dólar negociadas na BM&F por mais de um ano, pudemos calcular suas volatilidades implícitas e em seguida montar/interpolarmos uma superfície de volatilidade discreta, baseada nas diversas opções de dólar/real negociadas, com strikes e maturidades diferentes.

O processo de variação diária dos pontos calculados desta superfície de volatilidade foi reproduzido via análise de componentes principais, simplificando sua análise estatística ao reduzir a dimensão do processo em variáveis ortogonais. A partir desta análise, algumas conclusões interessantes, já obtidas em outros estudos, porém em outros mercados, puderam ser alcançadas.

A decomposição da variação da volatilidade implícita em 5 autovetores preservando 75% da variância original deste processo é um resultado importante de nosso trabalho. A partir dele conclui-se que, em uma carteira com diversas opções cambiais, a volatilidade implícita deve ser representada por 5 fatores de risco diferentes e não por um único fator.

Como resultado mais importante, é possível concluir, analisando os resultados obtidos, que no mercado de opções européias de dólar negociadas na BM&F as variações diárias de sua superfície de volatilidade possuem uma fraca correlação com as variações do dólar spot, o ativo objeto em questão. A covariância normalizada, índice que pode variar de 0 e 1, entre as componentes que representam a variação da superfície de volatilidade e a variação do valor do dólar spot foi de 0,34. Assim, podemos concluir que a volatilidade implícita destas opções

deve ser tratada como um fator de risco à parte, muito embora suas variações estejam correlacionadas com a variação do valor do ativo objeto de modo significativo.

Este resultado está em linha com a apresentado em outros mercados, como o índice de ações S&P500, estudado por Cont; Fonseca (2002) e Skiadopoulos, Hodges, Clewlow (2000) e com o FTSE1000. Uma comparação mais direta dos resultados não é possível, pois as metodologias para apuração desta correlação são diferentes nos 3 trabalhos.

Referência Bibliográfica

AÏT-SAHALIA, Y.; LO, A. Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices. **J. Finance**, v. 53, p.499-548, 2000.

AVELLANEDA, M.; FRIEDMAN, C.; HOLMES, R. ; SAMPERI, D. Calibrating volatility surfaces via relative-entropy minimization. **Applied Mathematical Finance**, v. 4, p.37-64, 1997.

BATES, D. Empirical Option Pricing: A Retrospection. **Journal of Econometrics**, v. 116, p.387-404, 2003

BLACK, F. The pricing of commodity contracts. **Journal of Financial Economics**, v. 3, p167-179, 1976

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **J. Political Economy**, v. 81, p.637-654, 1973

CARR, P.; MADAN, D. A note on sufficient conditions for no arbitrage. **Finance Research Letters**, v. 2, p.125-130, 2005

CONT, R.; FONSECA, J.; DURRLEMAN, V. Stochastic models of implied volatility surfaces. **Economic Notes**, v. 31(2), p.361-377, 2002

CONT, R.; FONSECA, J. Dynamics of implied volatility surfaces. **Quantitative Finance**, v. 2(1), p.45-60, 2002.

COX, J. C. ; ROSS, S. A. ; RUBINSTEIN, M. Option Pricing: A Simplified Approach. **Journal of Financial Economics**, v. 7, p229-263, 1979.

DERMAN, E. Regimes of volatility. **Risk**, v. 12(4), p.55-59, 1999

DERMAN, E.; KANI, I., "The volatility smile and its implied tree". **Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs**, 1994

DUPIRE, B. Pricing with a smile, **Risk**, v. 7. p.18-20, 1993

FAHRMEIR, L.; KNORR-HELD, L. **Dynamic and semiparametric models. Smoothing and Regression: Approaches, Computation and Application** (Edited by M. Schimek). Wiley, New York, 2000

FENGLER, M.; WANG, Q. Fitting the smile revisited: A least squares kernel estimator for the implied volatility surface. **SFB 373 Discussion Paper 25**, Humboldt-Universität, Berlin, 2003

FOUQUE, J.-P.; G. PAPANICOLAOU, G.; SIRCAR, R.; SOLNA, K. Timing The Smile. **Wilmott Magazine**, March 2004

GUIMARÃES, B. V.; SILVA, M. E. A Possibilidade de Saltos no Câmbio Implícita nos Prêmios das Opções. **Revista Brasileira de Economia**, v. 56(3), p.397 - 428, 2002

HE, X.; NG, P. COBS: Qualitatively Constrained Smoothing via Linear Programming. **Discussion Paper, University of Illinois**, 1999

JACKWERTH, J.C. Option-Implied Risk-Neutral Distributions and Implied Binomial Trees: A Literature Review, **Journal of Derivatives**, v. 6, p.1-17, 1999

LAURINI, M. Imposing No-Arbitrage Conditions In Implied Volatility Surfaces Using Constrained Smoothing Splines. **IBMEC Working Paper**, WPE 41, 2007

MERTON, R.C. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, v. 4, p.141-183, 1973

MEUCCI, A. **Risk and Asset Allocation**. Springer, 2005.

RUBINSTEIN, M. Implied binomial trees, **J. Finance**, v. 49, p.771-818, 1994

SKIADOPOULOS, G.; HODGES, S.; CLELOW, L. Dynamics of the S&P500 implied volatility surface, **Rev. Derivatives Res.** , v. 3, p.263-82, 2000