Área temática:

Finanças

Título:

Uma alternativa de desenvolvimento matemático do modelo de saldo de caixa de Miller e Orr

AUTORES
LUIZ EURICO JUNQUEIRA COLI
Universidade Federal de Lavras
eurico@ufla.br

GERMAN TORRES SALAZAR
Universidade Federal de Lavras
german@ufla.br

Resumo
O trabalho apresenta uma alternativa de desenvolvimento matemático do modelo de saldo de caixa proposto pelos pesquisadores americanos Miller e Orr, em artigo publicado em 1966. Primeiramente, realizou-se uma pesquisa bibliográfica em textos publicados no Brasil. O resultado dessa pesquisa acusou que apenas uma obra, já esgotada, mostra o desenvolvimento matemático do modelo. Mas, não houve a preocupação com aspectos didáticos nessa exposição. Esse resultado motivou a continuação da pesquisa. O estudo se enquadra na categoria pesquisa fundamental, pois se ocupa em suprir uma lacuna identificada na literatura brasileira da área. Quanto à aplicação de métodos, recorreu-se tanto ao dedutivo quanto ao método indutivo. Um modelo pode ser tido como uma representação simplificada de um fenômeno. Desse modo, o desenvolvimento permitiu evidenciar os pressupostos admitidos e as variáveis negligenciadas na concepção do modelo de caixa. Também houve a preocupação de expor didaticamente o desenvolvimento matemático do referido modelo.

Palavras-chave: saldo de caixa, premissas do modelo, desenvolvimento matemático.

Abstract
The paper presents an alternative development of the mathematical model proposed cash balance by U.S. researchers Miller and Orr, in an article published in 1966. First, we carried out a literature search on articles published in Brazil. The result of this research acknowledged that only one work, already exhausted, shows the development of mathematical model. But there was concern about aspects of teaching at the exhibition. This result led to further research. The study fits in the category for basic research, since it occupies fill a gap identified in the Brazilian literature of the area. Concerning the application of methods, appealed to both deductive as the inductive method. A model can be viewed as a simplified representation of a phenomenon. Thus, the development has highlighted the accepted assumptions and variables neglected in the design of the cash balance model. There was also the concern of exposing didactically the development of the mathematical model.

Key words: cash balance, model assumptions, mathematical development.

1 Introdução

As organizações demandam fundos para investimentos que se renovam no longo prazo (ativos fixos) e assim como no curto prazo (ativos de giro). Esse segundo tipo de investimento possui a característica de oferecer baixo ou nenhum retorno. A eficiente alocação de fundos é necessária para que resulte em agregação de valor à organização. Para que cada fonte de demanda disponha de fundos em nível compatível com suas atribuições, os administradores devem tomar decisões considerando dois aspectos geralmente de natureza conflituosa: liquidez e rentabilidade. Nesse quesito, o papel do gestor é balancear os investimentos em ativos, considerando as expectativas de risco e retorno. A disponibilidade (caixa e bancos – conta movimento) é um ativo de giro, doravante, será referida apenas por caixa. Se por um lado, caixa reduz o risco de insolvência por ser de liquidez imediata, por outro, não oferece rentabilidade. Logo, o seu dimensionamento é fundamental para que haja eficiência na gestão de fundos de uma organização. Modelos são elaborados com esse propósito. Os pesquisadores americanos Merton H. Miller e Daniel Orr (Miller e Orr, 1966) conceberam um desses.

Segundo Ferreira (1999), modelo pode ser tido como um conjunto de hipóteses sobre um sistema por meio do qual, à luz da teoria científica, se procura explicar ou prever o seu comportamento. Para Stevenson (1986, p. 05) é uma representação de forma simplificada de um problema ou de uma situação da vida real com propósito de ressaltar certos aspectos sem considerar todos os elementos envolvidos no contexto. Portanto, a demonstração das etapas constituintes de um dado modelo permite evidenciar as premissas adotadas e, em decorrência, ressaltar as conseqüentes limitações na predição do comportamento do sistema que o modelo procura reproduzir.

Este trabalho apresenta uma alternativa de desenvolvimento matemático do modelo de caixa proposto por Miller e Orr, em 1966. Procura evidenciar as premissas arbitradas e os fatores negligenciados. Para sua execução, foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre os modelos de caixa existentes na literatura da área. Contemplou textos publicados por editoras nacionais, além de artigos acadêmicos nos periódicos: Revista Brasileira de finanças – RBFin; Revista de administração contemporânea – RAC; Revista de administração de empresas – RAE e Revista eletrônica de administração – READ; Revista de administração Mackenzie – RAM; Revista de administração da Universidade de São Paulo – RAUSP; Revista de contabilidade & finanças. O critério tomou por base os periódicos brasileiros com nível mínimo B2 do sistema de classificação da CAPES/MEC (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior do Ministério da Educação do Brasil). Apesar de priorizar trabalhos publicados no Brasil, buscaram-se também textos editados em inglês, obtidos principalmente por meio do portal mantido pela CAPES/MEC.

2. Objetivos

Para alcançar o propósito deste trabalho, foram formulados os seguintes objetivos:

1) levantar o tratamento dispensado ao modelo de caixa proposto por Miller e Orr pela literatura brasileira da área financeira e verificar a existência de registro do desenvolvimento matemático desse modelo de caixa;

2) ressaltar os pressupostos básicos e as medidas simplificadoras adotadas por Miller e Orr para a formulação do modelo de caixa;

3) apresentar uma alternativa para o desenvolvimento matemático do modelo de caixa proposto originalmente por Miller e Orr em 1966;

4) propor uma abordagem para o modelo na condição em que o saldo mínimo de caixa aceito seja diferente de zero.

3. Revisão de literatura

De acordo com Ross, Westerfield e Jaffe (1995, p 555), Baumol foi pioneiro em apresentar um modelo formal que considera os custos de transferência e de oportunidade na administração de caixa. Baumol (1952) tomou por base a existência de dois ativos: caixa e uma modalidade de aplicação financeira. Por hipótese, considerou haver um custo de oportunidade associado à manutenção de saldo de caixa ocioso. Por outro lado, supôs incorrer-se em um outro custo de transferência relativo a cada operação executada entre esses dois ativos. Portanto, em decorrência dos pressupostos adotados no modelo, ocorre uma relação conflituosa entre ambos os custos. O modelo de Baumol é determinístico, ou seja, as entradas e saídas de caixa são conhecidas a priori.

Enquanto o modelo de Baumol é determinístico, o proposto por Miller e Orr possui um comportamento aleatório. Em outras palavras, o modelo de Miller e Orr assume um comportamento bernoulliano em que há uma probabilidade <**p**> de acréscimo no saldo de caixa do período em relação ao do período anterior (sucesso) e uma outra probabilidade <**q**> de redução de saldo (fracasso). Como se pressupõe que existam apenas essas duas alternativas de ocorrências, então se tem: $p + q = 1$. O modelo simples de Baumol pode ser interpretado como tendo um comportamento de ensaio de Bernoulli degenerado. Isto é, tem uma probabilidade nula de sucesso ($p = 0$) e um evento certo de insucesso ($q = 1$).

Apesar das limitações decorrentes das premissas adotadas, o modelo de Miller e Orr vem sendo objeto da atenção de pesquisadores brasileiros. Alguns procuram discutir as evidências empíricas do modelo: Sousa e Abrantes Filho (1998) aplicam o modelo para o caso de um grupo empresarial do setor de transporte, enquanto Matsumoto e Lima (2005) procuram determinar o saldo de caixa utilizando o modelo de Baumol e o de Miller e Orr, aplicando-os em uma empresa industrial do segmento de bebidas. Outros apresentam modelos de caixa existentes na literatura financeira, mas não exploram o desenvolvimento matemático do modelo. Costa Jr. e Saurin (1994) dissertam sobre vários modelos de administração de caixa, a partir de uma pesquisa bibliográfica realizada. Villalba e Sousa (2001) também apresentam alguns modelos de caixa, incluindo Miller e Orr. Mas, optam por operar com um modelo próprio aplicado a uma empresa da área de tecnologia e informática.

Observou-se na pesquisa bibliográfica que, quando a obra apresenta os aspectos conceituais do modelo, prevalece uma abordagem teórica (Matias, 2007; Assaf Neto, 2003; Lemes Júnior, Rigo e Cherobim, 2002; Brealey Myers e Marcus, 2001; Assaf Neto e Silva, 1997; Ross, Westerfield e Jaffe, 1995). Apesar de a maioria das obras pesquisadas preferir fazer esse tipo de abordagem, não apresentam o desenvolvimento matemático do modelo. Optam por trabalhar com o seu resultado final, ou seja, a fórmula matemática do modelo (Matias, 2007; Assaf Neto, 2003; Lemes Júnior, Rigo e Cherobim, 2002; Assaf Neto e Silva, 1997; Ross, Westerfield e Jaffe, 1995). Inclusive, apurou-se que, em Brealey, Myers e Marcus (2001), apenas são descritas as características, não sendo apresentadas as equações do modelo. A exceção encontrada foi Mehta (1978), mas não há preocupação com o aspecto didático da demonstração matemática.

Mehta (1978, p. 165) afirma tomar por base para o desenvolvimento matemático do modelo o seguinte texto: ORR, D. **Cash management and the demand for money**. New York: Praeger Publishers, 1970. 180 p. Já o trabalho pioneiro (Miller e Orr, 1966), assim como (Miller e Orr, 1968), não oferecem o detalhamento matemático do modelo, pois visavam mostrar sua consistência metodológica e aplicações. Mehta (1978, p. 155-168) desenvolve o modelo arbitrando que cada alteração no saldo de caixa flutue em uma unidade monetária, para mais ou para menos, por período unitário. Apesar de admitir que essa hipótese ter sido abandonada posteriormente por Miller e Orr (Mehta, 1978, p. 155). No trabalho original, os pesquisadores consideraram a hora como período unitário e assumiram uma variação de <**m**> dólares a cada período (Miller e Orr, 1966, p. 418).

4. Metodologia

A pesquisa científica constitui uma investigação planejada, sistematizada e conduzida por critérios metodológicos consagrados pela ciência. Corresponde ao método de abordagem de um problema em estudo pelo pesquisador. Método é uma palavra de origem grega e possui o significado de conjunto de etapas e processos a serem executados de forma ordenada para investigar fatos e/ou abordar problemas. Torna-se imprescindível trabalhar com método para que os resultados da pesquisa sejam confiáveis e válidos (Laville e Dionne, 1999).

Pesquisar, por uma perspectiva ampla, significa buscar uma informação que não se dispõe no momento e que se deseja conhecer. Para tanto, pode-se procurar essa informação desejada em livros e revistas, examinar documentos e entrevistar pessoas capacitadas. Em sentido lato, pode-se dizer que esses processos são exemplos de condução de pesquisa. Não necessariamente, constituem uma investigação científica, pois essa exige a adoção de normas consagradas de etapas e processos – método. Um modo de realizar uma pesquisa científica é por meio da literatura disponível sobre o tema específico que se pretende investigar. Esse método é chamado de pesquisa bibliográfica (Gil, 1996, p. 19 e 48-51).

A documentação do pesquisador deve se apoiar principalmente em livros e artigos. Como também pode contemplar relatórios de pesquisa não publicados, teses, enciclopédias e dicionários especializados, resenhas de obras, etc. Alguns pesquisadores, argumentando que a pesquisa tem por propósito resolver um problema, a classificam em termos de pesquisa fundamental e de pesquisa aplicada. O primeiro tipo de pesquisa busca "... preencher vazios no próprio saber;", enquanto a aplicada destina-se à abordagem de problemas de cunho prático (Laville e Dionne, 1999, p 44 e 113).

Primeiramente foi efetuada uma pesquisa bibliográfica para verificar se havia registro ou não do desenvolvimento matemático do modelo de caixa de Miller e Orr em obras publicadas em território brasileiro. O resultado acusou que apenas uma obra apresenta a demonstração (Mehta, 1978). Essa está esgotada e nem constar mais no catálogo da editora, disponível em seu site (http: \\www.editoraatlas.com.br. Acesso em 12 de abr. 2010). Ademais, Mehta (1978) não se preocupou em realizar uma exposição didática do desenvolvimento matemático do modelo. Os fatos enunciados motivaram os autores a prosseguirem na tarefa proposta.

O trabalho proposto se enquadra na categoria pesquisa fundamental, pois se ocupa em apresentar o desenvolvimento de um modelo de caixa e assim suprir uma lacuna identificada na literatura da área financeira em território nacional. Partindo-se da perspectiva da Administração ser uma ciência aplicada multidisciplinar, os autores usaram conceitos das disciplinas de matemática e estatística, para alcançar o objetivo proposto de desenvolver o modelo de caixa por Miller e Orr.

5 Desenvolvimento matemático do modelo

5.1 Considerações gerais

Semelhante ao modelo de Baumol, supõe-se que existam custos de conversão e de oportunidade. Os custos de compra e de venda de títulos negociáveis, independente da quantidade, por hipótese, são constantes. O custo de oportunidade de manutenção de fundos ociosos em caixa é a rentabilidade dos títulos negociáveis. Também se arbitra que o custo de oportunidade seja fixo durante o ciclo considerado na análise. Ao contrário do modelo de Baumol, no de Miller e Orr não se sabe, a princípio, quando serão efetuados aplicações e resgates de títulos negociáveis. Esse modelo trabalha com três níveis de caixa em destaque: o desejado (ideal), o mínimo e o máximo aceitos. Sejam, de forma literal, os níveis de caixa: <**A**> (alto), <**B**> (baixo) e <**D**> (desejado). Por hipótese, a movimentação de caixa é aleatória, mas apresenta uma distribuição normal. Assim, o controle deve ser feito de modo a se observar o desempenho do saldo de caixa. Quando alcançar o limite máximo, nível A, o procedimento a ser executado é o de aplicação do valor excedente (diferença entre os níveis máximo e desejado) em títulos negociáveis, retornando assim o caixa para o nível desejado (D). Por outro lado, ao atingir o limite inferior, nível B, é efetuado resgate de títulos em valor suficiente para recompor o caixa no nível desejado. A figura a seguir ilustra a situação:

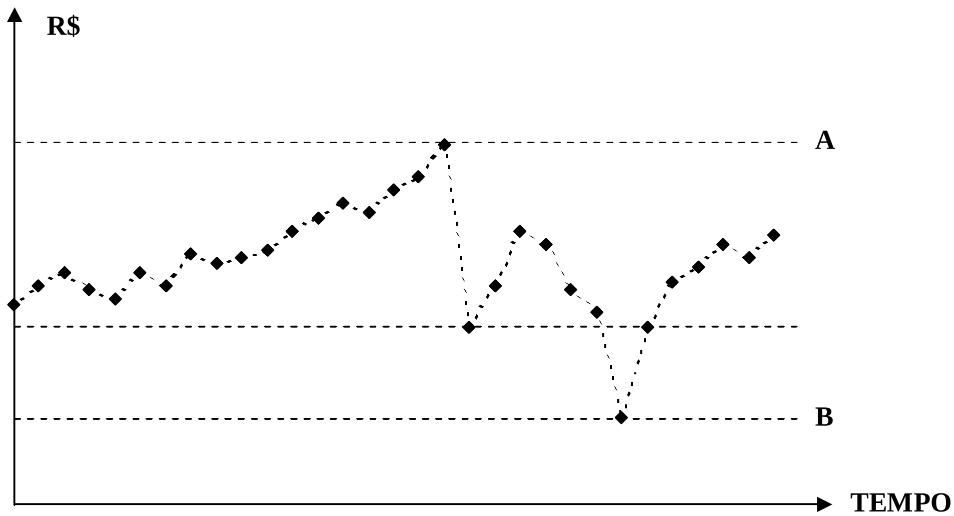

FIGURA 1 – Gráfico do saldo de caixa versus tempo no modelo de Miller-Orr
Fonte: adaptado de Miller e Orr (1966, p. 420)

Em síntese, os pressupostos básicos assumidos pelo modelo podem ser descritos:

i) A taxa de juros do custo de oportunidade por período é considerada constante ao longo do intervalo de tempo analisado (denominado ciclo).

ii) O custo de conversão é tido como constante ao longo do ciclo estudado, independente da quantia e do sentido da transferência (do caixa para a aplicação financeira ou o contrário).

iii) O prazo demandado para efetuar a transferência de fundos pode ser negligenciado, ou seja, considera-se que a conversão ocorre no mesmo período em que é requerida.

iv) O fluxo do saldo de caixa oscila aleatoriamente dentro de um intervalo de valores aceito, mas obedece a uma seqüência de ensaios de Bernoulli.

Para o uso do modelo de Miller e Orr, é preciso que se estabeleça ou determine os seguintes parâmetros:

1) O nível inferior de caixa aceito (medida do nível de risco tolerado pelos gestores)[1].
2) O desvio padrão esperado para o fluxo de caixa (em muitos casos, diários).
3) A taxa de juros obtida com aplicação em títulos (custo de oportunidade).
4) Os custos de conversão decorrentes da compra e da venda de títulos (Matias, 2007; Assaf Neto, 2003; Lemes Júnior, Rigo e Cherobim, 2002; Brealey, Myers e Marcus, 2001; Assaf Neto e Silva, 1997; Ross, Westerfield e Jaffe, 1995).

5.2 Custo total associado ao caixa

Será denotado por <**k**> o custo de transferência de fundos e por <**i**> o custo de oportunidade. Este último é a rentabilidade que a organização deixa de ganhar por estar com o saldo em conta corrente e não investido na aplicação financeira. Ou seja, quanto que se deixa de ganhar para ter um nível de segurança em relação capacidade imediata (liquidez) de saldar as obrigações. Logo, o custo total de manter fundos no caixa depende do custo de conversão e

[1] Inicialmente, será arbitrado que o saldo mínimo de caixa admitido seja zero. Como Miller e Orr (1966, p. 418) enfatizaram essa fronteira inferior do intervalo aceito de oscilação do saldo de caixa não pode ser ultrapassada em nenhuma hipótese. Uma maneira de obedecer sem risco de transgredir essa condição é estabelecer o valor zero como referência para o saldo mínimo de caixa.

do custo de oportunidade. O valor do primeiro varia de acordo com número de transferências efetuadas no período e o do segundo com saldo disponível no caixa. A condição geral que se tem é que o saldo flutua ao longo do período. Uma alternativa é trabalhar com o saldo médio previsto para o intervalo de tempo considerado. Por outro lado, o número de transferências efetuadas depende da probabilidade de sua ocorrência em um período unitário. Tomando-se as condições admitidas, o custo de oportunidade por manter saldo de caixa, por unidade monetária e por período unitário, pode ser calculado do seguinte modo: $CO = i \times Sd_{Med}$; onde:

$i \rightarrow$ taxa de juros paga pelo fundo de investimentos (por unidade de período);
$Sd_{Med} \rightarrow$ saldo médio do período unitário (valor monetário).

Já o custo de conversão pode ser obtido pela equação: $CC = k \times P(t)$. Onde:

$k \rightarrow$ custo de conversão do caixa para a aplicação financeira e vice-versa (valor monetário);
$P(t) \rightarrow$ probabilidade de ocorrência de aplicação ou resgate num período unitário.

Assim, o custo total para uma unidade monetária num período unitário, seria:

$$CT = CC + CO \therefore CT = k \times P(t) + i \times Sd_{Med}. \quad \textbf{(01)}$$

5.3 Saldo médio do período

Será analisada a variação do saldo periódico (dia, por exemplo) de uma unidade monetária (para mais ou para menos). Seja <**x**> o saldo atual. Considere <**p**> a probabilidade de ocorrer o acréscimo e <**q**> a probabilidade de ocorrer o decréscimo de uma unidade monetária no próximo período. Ou seja: $P(x+1) = p$ e $P(x–1) = q$. O diagrama a seguir em forma similar à árvore de decisão, mostra os estados possíveis de serem assumidos pelo saldo de caixa nos quatros estágios subseqüentes ao atual. Isto é:

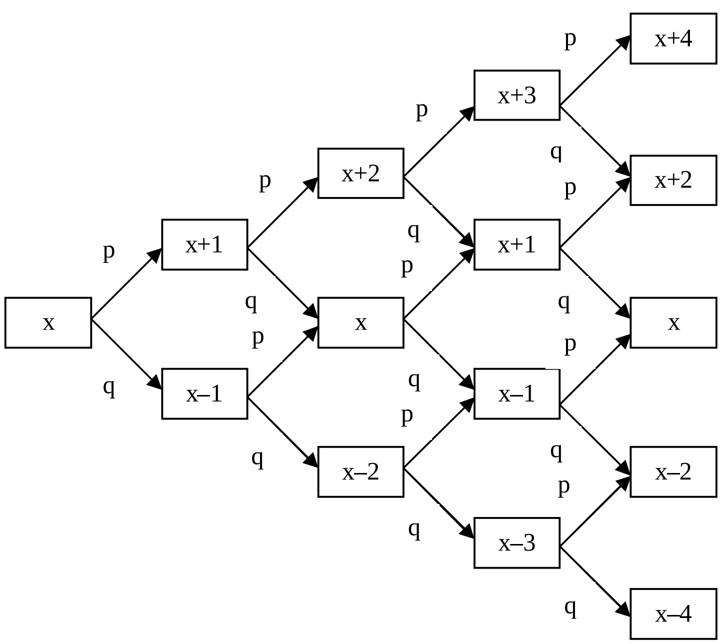

FIGURA 02 – Fluxo de caixa previsto pelo modelo a partir de um saldo inicial
Fonte: elaborado pelos autores

Assim, a probabilidade de se obter um saldo <**x**> no período subseqüente <**t+1**>, seria dado por: $P_{t+1}(x) = p \times P_t(x–1) + q \times P_t(x+1)$. Isto quer dizer que haveria acréscimo de uma unidade monetária, com probabilidade <**p**>, passando de <**x–1**> no período <**t**> para <**x**> no período subseqüente <**t+1**>. Outra possibilidade seria haver a redução de uma unidade monetária, com probabilidade <**q**>, passando de <**x+1**> no período <**t**> para <**x**> no período subseqüente <**t+1**>.

As exceções a essa regra são quando o saldo periódico <**x**> estiver em <**1**> e em <**A–1**>. Se o saldo atingir no período <**t**> o nível <**1**>, pode ocorrer que o saldo no período seguinte <**t+1**> alcance o valor zero. Nesse caso, haverá um resgate de <**D**> unidades monetárias para recompor o saldo ao nível de caixa desejado. Já em <**A–1**> para o período <**t**>, se houver aumento de uma unidade monetária no período <**t+1**>, o procedimento será de aplicação da quantia <**A–D**> para que o saldo volte ao nível desejado. O saldo do período <**t**> para <**x = D**>, também é especial. Sua probabilidade pode ser: $P_{t+1}(D) = p\times P_t(D-1) + q\times P_t(D+1) + p\times P_t(A-1) + q\times P_t(1)$. Assim, pode-se resumir:

$$\begin{cases} P_{t+1}(x) = p\times P_t(x-1) + q\times P_t(x+1) \text{ para } x \neq D; \\ P_{t+1}(x) = p\times[P_t(D-1) + P_t(A-1)] + q\times[P_t(D+1) + P_t(1)] \text{ para } x = D. \end{cases}$$

Como, por suposição, o caixa nunca se posicionará em zero e nem no nível mais elevado <**A**>, tem-se que:

1) $P_t(x = 0) = P_t(x = A) = 0$;
2) $\sum_{x=0}^{A} P_t(x) = \sum_{x=1}^{A-1} P_t(x) = 1$.

O saldo médio de caixa poderá oscilar, por hipótese, em uma unidade monetária para mais ou para menos, com probabilidades <**p**> e <**q**>, respectivamente. A situação assim admitida se enquadra num comportamento típico da distribuição de Bernoulli. Quando o intervalo de tempo em estudo compreende <**n**> períodos e <**n**> observações de alterações do saldo de caixa, ocasionará uma seqüência de ensaios de Bernoulli. Essa seqüência de ensaios constituirá a base para que o fluxo do saldo de caixa periódico apresente uma distribuição binomial. A expectância ou média para um ensaio de Bernoulli pode ser assim determinada: $\mu = E(x) = \Sigma x\times P(x)$, com $\Sigma P(x) = 1$. Para as condições admitidas no presente estudo, tem-se que os estados possíveis e suas respectivas probabilidades são:

- $X = -1 \Rightarrow P(x) = q$;
- $X = 0 \Rightarrow P(x) = 0$;
- $X = +1 \Rightarrow P(x) = p$.

Então, a média para um ensaio será: $\mu_1 = \sum_{x=-1}^{+1} x \times P(x) \;\therefore\; \mu_1 = (-1)\times q + (0)\times 0 + (+1)\times p \;\therefore$

$\mu_1 = p - q$. A variância pode ser calculada do seguinte processo: $\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$.
$E(x^2) = \Sigma x^2\times P(x) = (-1)^2\times q + (0)^2\times 0 + (+1)^2\times p \;\therefore\; E(x^2) = p + q$. Logo, fica:
$\sigma_1^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = p + q - (p - q)^2 = p + q - (p^2 - 2p\times q + q^2) \;\therefore$
$\sigma_1^2 = p + q - p^2 + 2p\times q - q^2 \;\therefore\; \sigma_1^2 = p\times(1 - p) + q\times(1 - q) + 2p\times q$.
Mas, sabe-se que: $p + q = 1$. Então, fica: $\sigma_1^2 = p\times q + q\times p + 2p\times q \;\therefore\; \sigma_1^2 = 4p\times q$.

Quando ocorrer uma seqüência de <**n**> ensaios, resulta que:

- Média $\rightarrow \mu = n\times(p - q)$;
- Variância $\rightarrow \sigma^2 = 4n\times p\times q$.

A condição em que a oscilação de valor em relação à média é máxima (situação mais desfavorável, pois provocará o maior saldo de caixa possível), seria: $p = q = 1/2$. Essa constatação pode ser alcançada por meio da obtenção do ponto extremo da função <$\boldsymbol{\sigma^2}$> em relação à variável <**p**>, utilizando a técnica de derivação. Deve-se recordar a condição que se tem: $p + q = 1$. Ou seja: $\sigma^2 = 4n\times p\times q = 4n\times p\times(1 - p) \;\therefore\; \sigma^2 = 4n\times p - 4n\times p^2$.

De acordo com Stevenson (1986, p. 147), se a probabilidade de sucesso <**p**> estiver próxima de meio (50%) e, na medida em que <**n**> cresce, melhor é a aproximação da distribuição binomial para a normal. Conforme posto por Miller e Orr (1966, p. 419), admite-se que o número de observações <**n**> suficientemente grande para que a referida aproximação seja adequada. Também se impõe a condição: $p = q = 1/2$. Em conseqüência, tem-se que:

- Média $\rightarrow \mu = n\times(p - q) = n\times(0{,}5 - 0{,}50) \therefore \mu = 0$;
- Variância $\rightarrow \sigma^2 = 4n\times p\times q = 4n\times(1/2)\times(1/2) \therefore \sigma^2 = n$. **(02)**

Quando o número <**n**> de observações puder ser considerado grande e impondo-se a condição: $p = q = 1/2$. Desse modo, resulta:
$P_{t+1}(x) = (1/2)\times P_t(x-1) + (1/2)\times P_t(x+1) \therefore 2\times P_{t+1}(x) = P_t(x-1) + P_t(x+1)$. Simplificando a representação, ficaria:

$$\begin{cases} P_{x-1} - 2P_x + P_{x+1} = 0 \text{ para } x \neq D; \\ P_{x-1} - 2P_x + P_{x+1} + P_1 + P_{A-1} = 0 \text{ para } x = D. \end{cases}$$

Supondo que o saldo no início do primeiro período seja <**s**> (instante zero) e <**x**> o saldo verificado em um período qualquer. Arbitrando-se, por hipótese, que: $s > x$ (s maior que x) e chamando-se <$\mathbf{s_t}$> o saldo de caixa no período <**t**>, adota-se: $z_t = s_t - x$. Nos pontos extremos, tem-se: $z = s - x$ (instante zero) e $z = 0$ (instante em que s_t assume o valor x). Nessas condições, Feller (1968, p. 345) mostra que a probabilidade de partir-se de um valor <**z**> no instante zero e chegar à zero num período qualquer <$\mathbf{P_{Z0}}$>, quando se tem a condição: $p = q = 1/2$, pode ser determinada pela equação: $P_{Z0} = 1 - \frac{z}{m}$, onde <**m**> é a diferença entre <$\mathbf{s_t}$> e <**x**> para a situação em que: $s_t = A$ (saldo de caixa máximo admitido). Goldberg (1958, p. 57) afirma que essa é uma equação de diferenças que admite solução linear. Em conseqüência, podem ser expressas do seguinte modo: $P_{Z0} = a + b\times z$ (Feller, 1968, p. 345). Portanto, voltando a operar com saldos de caixa, fica: $P_x = \alpha + \beta x$.

Uma solução óbvia para $P_0 = P_A = 0$, seria: $\alpha = \beta = 0$. Como essa solução não convém, podem-se admitir as seguintes situações:

$$\begin{cases} P_x = \alpha + \beta x; \text{ para } 0 \leq x \leq D; \quad \textbf{(03)} \\ P_x = \chi + \delta x; \text{ para } D \leq x \leq A. \quad \textbf{(04)} \end{cases}$$

Da equação **(03)**, impondo a condição que $x = 0$, tem-se: $P_0 = \alpha + \beta\times 0 \therefore 0 = \alpha + 0 \therefore \alpha = 0$. De modo análogo, para a condição que $x = A$, na equação **(04)**, tem-se: $P_A = \chi + \delta\times A \therefore 0 = \chi + \delta\times A \therefore \chi = -\delta\times A$. Na a condição que $x = D$, as duas equações são válidas. Logo, fica:

- Da equação **(03)**: $P_D = \alpha + \beta\times D$.
- Da equação **(04)**: $P_D = \chi + \delta\times D$. Combinando as duas equações, resulta:

$\alpha + \beta\times D = \chi + \delta\times D \therefore 0 + \beta\times D = -\delta\times A + \delta\times D \therefore \beta\times D = \delta\times(D - A) \therefore \delta = \dfrac{\beta\times D}{(D-A)}$.

Sabe-se que a soma de todas as condições possíveis para o nível de caixa fornece uma probabilidade igual à unidade. Ou seja:

$$\sum_{x=0}^{D} P_x + \sum_{x=D+1}^{A} P_x = 1 \therefore \sum_{x=0}^{D}(\alpha + \beta x) + \sum_{x=D+1}^{A}(\chi + \delta x) = 1 \therefore \sum_{x=0}^{D}\beta x + \sum_{x=D+1}^{A}(-\delta A + \delta x) = 1. \quad \textbf{(05)}$$

Sabe-se também que: $\sum_{x=D+1}^{A}(-\delta A+\delta x)=\sum_{x=D+1}^{A}[(-\delta)\times(A-x)]=-\delta\times\sum_{x=D+1}^{A}(A-x)$.

Desenvolvendo o somatório, ter-se-á a seguinte situação:

$-\delta\times\sum_{x=D+1}^{A}(A-x)=-\delta\times\{[A-(D+1)]+[A-(D+2)]+\ldots+[A-(A-1)]+[A-A]\}$. Pode-se observar que a equação possui <A – D> termos em <A>, portanto, resulta:

$-\delta\times\sum_{x=D+1}^{A}(A-x)=-\delta\times\left\{[A\times(A-D)]-\sum_{x=D+1}^{A}x\right\}$. Substituindo em **(05)**, ter-se-á:

$\beta\times\sum_{x=0}^{D}x+\delta\times\left[\sum_{x=D+1}^{A}x\right]-\delta A\times(A-D)=1$. Mas, sabe-se ainda que: $\sum_{x=D+1}^{A}x=\sum_{x=0}^{A}x-\sum_{x=0}^{D}x$.

Então, fica: $\beta\times\sum_{x=0}^{D}x+\delta\times\left[\sum_{x=0}^{A}x-\sum_{x=0}^{D}x\right]-\delta A\times(A-D)=1\ \therefore$

$(\beta-\delta)\times\sum_{x=0}^{D}x+\delta\times\left[\sum_{x=0}^{A}x-A\times(A-D)\right]=1$. Os somatórios $\sum_{x=0}^{D}x$ e $\sum_{x=0}^{A}x$ são casos particulares de progressão aritmética (PA), cuja razão é igual à unidade nos dois casos. Sabe-se que: $S_{PA}=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$. Desse modo, fica:

$\sum_{x=0}^{D}x=\frac{(0+D)\times(D+1)}{2}=\frac{D\times(D+1)}{2}$; e $\sum_{x=0}^{A}x=\frac{(0+A)\times(A+1)}{2}=\frac{A\times(A+1)}{2}$.

Então, resulta: $(\beta-\delta)\times\frac{D\times(D+1)}{2}+\delta\times\left[\frac{A\times(A+1)}{2}-A\times(A-D)\right]=1$.

Mas, chegou-se a conclusão que: $\delta=\frac{\beta\times D}{(D-A)}$. Substituindo, fica:

$$\left[\beta-\frac{\beta\times D}{(D-A)}\right]\times\frac{D\times(D+1)}{2}+\frac{\beta\times D}{(D-A)}\times\left[\frac{A\times(A+1)}{2}-A\times(A-D)\right]=1\ \therefore$$

$$\left[\frac{\beta\times(D-A)-\beta\times D}{(D-A)}\right]\times\frac{D\times(D+1)}{2}+\frac{\beta\times D}{(D-A)}\times\left[\frac{A\times(A+1)}{2}+A\times(D-A)\right]=1\ \therefore$$

$$\left[\frac{-\beta\times A}{(D-A)}\right]\times\frac{D\times(D+1)}{2}+\frac{\beta\times D}{(D-A)}\times\frac{A\times(A+1)}{2}+\beta\times D\times A=1\ \therefore$$

$$\beta\times D\times A\times\left[\frac{(A+1)}{2\times(D-A)}-\frac{(D+1)}{2\times(D-A)}+1\right]=1\ \therefore\ \beta\times D\times A\times\left[\frac{A+1-D-1}{2\times(D-A)}+1\right]=1\ \therefore$$

$$\beta\times D\times A\times\left[\frac{-(D-A)}{2\times(D-A)}+1\right]=1\ \therefore\ \beta\times D\times A\times\left[-\frac{1}{2}+1\right]=1\ \therefore\ \beta\times D\times A\times\frac{1}{2}=1\ \therefore$$

$\beta=\frac{2}{D\times A}$. Substituindo, tem-se o valor do parâmetro δ:

$\delta=\frac{\beta\times D}{(D-A)}=\beta\times\frac{D}{(D-A)}=\frac{2}{D\times A}\times\frac{D}{(D-A)}\ \therefore\ \delta=\frac{2}{A\times(D-A)}$. E ainda:

$\chi=-\delta\times A\ \therefore\ \chi=-\left[\frac{2}{A\times(D-A)}\right]\times A=-\frac{2}{(D-A)}\ \therefore\ \chi=\frac{2}{(A-D)}$. Assim, tem-se:

$$P_x = \alpha + \beta x = 0 + \frac{2}{D \times A} \times x \ \therefore\ P_x = \frac{2x}{D \times A};\ \text{e}$$

$$P_x = \chi + \delta x = \frac{2}{(A - D)} + \frac{2}{A \times (D - A)} \times x \ \therefore\ P_x = \frac{2}{(A - D)} \times \left(1 - \frac{x}{A}\right).$$ Portanto, resulta:

$$\begin{cases} P_x = \dfrac{2x}{D \times A};\ \text{para } 0 \le x \le D \\[2ex] P_x = \dfrac{2}{(A - D)} \times \left(1 - \dfrac{x}{D}\right);\ \text{para } D \le x \le A \end{cases}$$

O saldo médio do ciclo de estudo <$\mathbf{Sd_{Med}}$>, pode ser obtido por meio do somatório do produto do nível de caixa e de sua probabilidade de ocorrência. Isto é:

$$Sd_{Med} = \sum_{x=0}^{A} x \times P_x \ \therefore\ Sd_{Med} = \sum_{x=0}^{D} x \times P_x + \sum_{x=D+1}^{A} x \times P_x \ \therefore$$

$$Sd_{Med} = \sum_{x=0}^{A} x \times P_x = \sum_{x=0}^{D} x \times \left(\frac{2x}{D \times A}\right) + \sum_{x=D+1}^{A} x \times \left[\frac{2}{(A - D)} \times \left(1 - \frac{x}{A}\right)\right] \ \therefore$$

$$Sd_{Med} = \sum_{x=0}^{D} x^2 \times \left(\frac{2}{D \times A}\right) + \sum_{x=D+1}^{A} \frac{2}{(A - D)} \times \left[x \times \left(1 - \frac{x}{A}\right)\right] \ \therefore$$

$$Sd_{Med} = \left(\frac{2}{D \times A}\right) \times \sum_{x=0}^{D} x^2 + \frac{2}{(A - D)} \times \sum_{x=D+1}^{A} \left(x - \frac{1}{A} \times x^2\right) \ \therefore$$

$$Sd_{Med} = \left(\frac{2}{D \times A}\right) \times \sum_{x=0}^{D} x^2 + \frac{2}{(A - D)} \times \left[\sum_{x=D+1}^{A} x - \frac{1}{A} \times \sum_{x=D+1}^{A} x^2\right] \ \therefore$$

$$Sd_{Med} = \left(\frac{2}{D \times A}\right) \times \sum_{x=0}^{D} x^2 + \frac{2}{(A - D)} \times \sum_{x=D+1}^{A} x - \frac{1}{A} \times \frac{2}{(A - D)} \times \sum_{x=D+1}^{A} x^2 .$$

Sabe-se que: $\sum_{x=D+1}^{A} x = \sum_{x=0}^{A} x - \sum_{x=0}^{D} x$. Então, resulta:

$$Sd_{Med} = \left(\frac{2}{D \times A}\right) \times \sum_{x=0}^{D} x^2 + \frac{2}{(A - D)} \times \left[\sum_{x=0}^{A} x - \sum_{x=0}^{D} x\right] - \frac{2}{A \times (A - D)} \times \left[\sum_{x=0}^{A} x^2 - \sum_{x=0}^{D} x^2\right] \ \therefore$$

$$Sd_{Med} = \left[\frac{2}{D \times A} + \frac{2}{A \times (A - D)}\right] \times \sum_{x=0}^{D} x^2 + \frac{2}{(A - D)} \times \left[\sum_{x=0}^{A} x - \sum_{x=0}^{D} x\right] - \frac{2}{A \times (A - D)} \times \sum_{x=0}^{A} x^2 \ \therefore$$

$$Sd_{Med} = \frac{2}{A} \times \left[\frac{(A - D) + D}{D \times (A - D)}\right] \times \sum_{x=0}^{D} x^2 + \frac{2}{(A - D)} \times \left[\sum_{x=0}^{A} x - \sum_{x=0}^{D} x\right] - \frac{2}{A \times (A - D)} \times \sum_{x=0}^{A} x^2 \ \therefore$$

$$Sd_{Med} = \frac{2}{A} \times \left[\frac{A}{D \times (A - D)}\right] \times \sum_{x=0}^{D} x^2 + \frac{2}{(A - D)} \times \left[\sum_{x=0}^{A} x - \sum_{x=0}^{D} x\right] - \frac{2}{A \times (A - D)} \times \sum_{x=0}^{A} x^2 \ \therefore$$

$$Sd_{Med} = \left[\frac{2}{D \times (A - D)}\right] \times \sum_{x=0}^{D} x^2 + \frac{2}{(A - D)} \times \left[\sum_{x=0}^{A} x - \sum_{x=0}^{D} x\right] - \frac{2}{A \times (A - D)} \times \sum_{x=0}^{A} x^2 \ \therefore$$

$$Sd_{Med} = \frac{2}{(A - D)} \times \left\{\frac{1}{D} \times \sum_{x=0}^{D} x^2 + \left[\sum_{x=0}^{A} x - \sum_{x=0}^{D} x\right] - \frac{1}{A} \times \sum_{x=0}^{A} x^2\right\}. \quad \mathbf{(06)}$$

Sabe-se que: $\sum_{x=0}^{D} x = \frac{(0 + D) \times (D + 1)}{2} = \frac{D \times (D + 1)}{2}$;

$\sum_{x=0}^{A} x = \frac{(0+A)\times(A+1)}{2} = \frac{A\times(A+1)}{2}$. Logo, tem-se:

$$\sum_{x=0}^{A} x - \sum_{x=0}^{D} x = \frac{A\times(A+1)}{2} - \frac{D\times(D+1)}{2} = \frac{1}{2}\times\left(A^2 + A - D^2 - D\right) = \frac{1}{2}\times\left[\left(A^2 - D^2\right) + (A - D)\right] \quad \therefore$$

$$\sum_{x=0}^{A} x - \sum_{x=0}^{D} x = \frac{1}{2}\times\left[(A+D)\times(A-D) + (A-D)\right] = \frac{(A-D)}{2}\times\left[(A+D)+1\right].$$

Já o cálculo do somatório do quadrado dos termos de uma progressão aritmética (PA) é mais complexo. Porém, o resultado pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\sum_{x=a}^{a+(n-1)\times r} x^2 = n\times a^2 + (n-1)\times n\times r\times a + \frac{(n-1)\times n\times(2\times n-1)}{6}\times r^2.$$

Impondo as seguintes condições específicas: a = 1 e r = 1, tem-se:

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = n\times 1^2 + (n-1)\times n\times 1\times 1 + \left[\frac{(n-1)\times n\times(2n-1)}{6}\right]\times 1^2 \quad \therefore$$

$\sum_{x=1}^{n} x^2 = n + (n-1)\times n + \frac{(n-1)\times n\times(2n-1)}{6}$. Após realizar algumas operações algébricas, chega-se a seguinte equação: $\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n\times[n\times(2n+3)+1]}{6}$. Também, pode-se considerar que:

$$\sum_{x=0}^{n} x^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 \quad \therefore \quad \sum_{x=0}^{n} x^2 = 0^2 + \left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2\right] \quad \therefore$$

$\sum_{x=0}^{n} x^2 = 0 + \sum_{x=1}^{n} x^2 \quad \therefore \quad \sum_{x=1}^{n} x^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2$. Em conseqüência, tem-se que:

$\sum_{x=0}^{D} x^2 = \sum_{x=1}^{D} x^2 = \frac{D\times[D\times(2D+3)+1]}{6}$; e $\sum_{x=0}^{A} x^2 = \sum_{x=1}^{A} x^2 = \frac{A\times[A\times(2A+3)+1]}{6}$. Então, fica:

$\frac{1}{D}\times\sum_{x=0}^{D} x^2 = \frac{1}{D}\times\frac{D\times[D\times(2D+3)+1]}{6} \quad \therefore \quad \frac{1}{D}\times\sum_{x=0}^{D} x^2 = \frac{D\times(2D+3)+1}{6}$; e

$\frac{1}{A}\times\sum_{x=0}^{A} x^2 = \frac{1}{A}\times\frac{A\times[A\times(2A+3)+1]}{6} = \frac{A\times(2A+3)+1}{6}$.

Substituindo os resultados obtidos na equação **(06)**, encontra-se:

$$Sd_{Med} = \frac{2}{(A-D)}\times\left\{\left[\frac{D\times(2D+3)+1}{6}\right] + \left[\frac{(A-D)}{2}\times(A+D+1)\right] - \left[\frac{A\times(2A+3)+1}{6}\right]\right\} \quad \therefore$$

$$Sd_{Med} = \frac{2}{(A-D)}\times\left\{\left[\frac{2D^2+3D+1}{6} - \frac{2A^2+3A+1}{6}\right] + \left[\frac{(A-D)}{2}\times(A+D+1)\right]\right\} \quad \therefore$$

$$Sd_{Med} = \frac{2}{(A-D)}\times\left\{\left[\frac{2D^2+3D+1-2A^2-3A-1}{6}\right] + \left[\frac{(A-D)}{2}\times(A+D+1)\right]\right\} \quad \therefore$$

$$Sd_{Med} = \frac{2}{(A-D)}\times\left\{\left[\frac{2(D^2-A^2)+3(D-A)}{6}\right] + \left[\frac{(A-D)}{2}\times(A+D+1)\right]\right\} \quad \therefore$$

$$Sd_{Med} = \frac{2}{(A-D)}\times\left\{\left[\frac{2(D+A)(D-A)+3(D-A)}{6}\right] + \left[\frac{(A-D)}{2}\times(A+D+1)\right]\right\} \quad \therefore$$

$$Sd_{Med} = \frac{2}{(A-D)}\times\left\{\frac{(A-D)\times[-2(D+A)-3]}{6} + \frac{(A-D)}{2}\times[(A+D)+1]\right\} \quad \therefore$$

$$Sd_{Med} = \frac{-2(D+A)-3}{3} + (A+D) + 1 = \frac{-2D-2A-3+3A+3D+3}{3} \therefore$$

$$Sd_{Med} = \frac{A+D}{3}. \quad \textbf{(07)}$$

5.4 Equação do saldo desejado

Pode-se observar que as alternativas de ocorrer transferência num período unitário se devem a duas condições: o saldo está em uma unidade monetária no período <**t**> e sucede uma redução em <**t+1**>; ou o nível de caixa está em <**A–1**> e acontece um acréscimo de uma unidade monetária. Na primeira situação, tem-se que sua probabilidade será dada por: $q \times P_1 = (1/2) \times P_1$; e na segunda: $p \times P_{A-1} = (1/2) \times P_{A-1}$. Como já foi discutido anteriormente, quando ocorrer <**n**> observações no ciclo considerado, em número tido como elevado, tem-se que a probabilidade de ocorrência será dada por: $P(t) = n \times [(1/2) \times P_1 + (1/2) \times P_{A-1}]$.

Para $x \in [0, D]$, conforme deduzido anteriormente, é válida a seguinte equação: $P_x = \beta \times x = \frac{2}{D \times A} \times x$. Já para $x \in [D, A]$, tem-se: $P_x = \chi + \delta \times x = \frac{2}{(A-D)} \times \left(1 - \frac{x}{A}\right)$. Então, a probabilidade de ocorrer transferência pode ser assim calculada:

- $P_1 = \frac{2}{D \times A} \times 1 = \frac{2 \times 1}{D \times A} = \frac{2}{D \times A}$; e
- $P_{A-1} = \frac{2}{(A-D)} \times \left(1 - \frac{A-1}{A}\right) = \frac{2}{(A-D)} \times \left(1 - 1 + \frac{1}{D}\right) \therefore P_{A-1} = \frac{2}{A \times (A-D)}$.

Logo, fica:

$$P(t) = n \times \left[\frac{1}{2} \times \frac{2}{D \times A} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{A \times (A-D)}\right] = \frac{n}{A} \times \left[\frac{1}{D} + \frac{1}{(A-D)}\right] = \frac{n}{A} \times \left[\frac{(A-D)+D}{D \times (A-D)}\right] \therefore$$

$$P(t) = \frac{n}{A} \times \left[\frac{A}{D \times (A-D)}\right] \therefore P(t) = \frac{n}{D \times (A-D)}. \quad \textbf{(08)}$$

Lançando os resultados das equações **(07)** e **(08)** na equação **(01)** do custo total – CT (2ª seção), chega-se: $CT = k \times P_{(t)} + i \times Sd_{Med} \therefore$

$$CT = k \times \frac{n}{D \times (A-D)} + i \times \frac{A+D}{3} \therefore CT = \frac{n \times k}{D \times (A-D)} + \frac{i \times (A+D)}{3}.$$

Chamando <**A – D**> por <**W**>, então, tem-se:

$$A - D = W^{(a)} \therefore A - D + 2D = W + 2D \therefore A + D = W + 2D^{(b)}.$$

Substituindo as equações (a) e (b) na equação do custo total (CT), fica:

$$CT = \frac{n \times k}{D \times W} + \frac{i \times (W + 2D)}{3} \therefore CT = \frac{n \times k}{D \times W} + \frac{i \times W}{3} + \frac{2 \times i \times D}{3}.$$

Derivando parcialmente a função custo total <**CT**> em relação às variáveis <**D**> e <**W**>, tem-se: $\frac{d(CT)}{d(D)} = \frac{0 \times (D \times W) - (n \times k) \times W}{(D \times W)^2} + 0 + \frac{2i}{3} = -\frac{n \times k \times W}{D^2 \times W^2} + \frac{2i}{3} \therefore$

$$\frac{d(CT)}{d(D)} = -\frac{n \times k}{D^2 \times W} + \frac{2i}{3};$$

$$\frac{d(CT)}{d(W)} = \frac{0 \times (D \times W) - (n \times k) \times D}{(D \times W)^2} + \frac{i}{3} + 0 = -\frac{n \times k \times D}{D^2 \times W^2} + \frac{i}{3} \therefore \frac{d(CT)}{d(W)} = -\frac{n \times k}{D \times W^2} + \frac{i}{3}.$$

Já a derivada segunda em relação às mesmas variáveis, resulta:

$$\frac{d^2(CT)}{d(D)^2} = -\frac{0-(n\times k)\times(2\times D\times W)}{(D^2\times W)^2}+0=\frac{2\times n\times k\times D\times W}{D^4\times W^2} \quad \therefore \quad \frac{d^2(CT)}{d(D)^2}=\frac{2\times n\times k}{D^3\times W};$$

$$\frac{d^2(CT)}{d(W)^2} = -\frac{0-(n\times k)\times(2\times D\times W)}{(D\times W^2)^2}+0=\frac{2\times n\times k\times D\times W}{D^2\times W^4} \quad \therefore \quad \frac{d^2(CT)}{d(W)^2}=\frac{2\times n\times k}{D\times W^3}.$$

Por hipótese: $A > D \Rightarrow W > 0$. Pelas condições impostas: $n \geq 0$; $k \geq 0$; e $D \geq 0$. Portanto, tem-se que: $\frac{d^2(CT)}{d(D)^2} \geq 0$ e $\frac{d^2(CT)}{d(W)^2} \geq 0$.

Do cálculo diferencial, tem-se que a derivada primeira fornece um candidato a ponto extremo da função, num dado intervalo de valores, quando igualada a zero. Já a derivada segunda informa se esse ponto extremo é de máximo ou de mínimo. Caso for positiva, o candidato a ponto extremo é de mínimo; e se negativa, de máximo. No caso, tem-se que o candidato a ponto extremo será de mínimo, pois a derivada segunda é positiva. Serão impostas as condições a obter um extremo: $\frac{d(CT)}{d(D)}=0$; e $\frac{d(CT)}{d(W)}=0$.

- $\frac{d(CT)}{d(D)} = -\frac{n\times k}{(D^*)^2\times W^*}+\frac{2i}{3}=0 \quad \therefore \quad \frac{2i}{3}=\frac{n\times k}{(D^*)^2\times W^*} \quad \therefore$

  $2\times\frac{i}{3}=\frac{n\times k}{D^*\times W^*}\times\frac{1}{D^*}$; **(09)**
- $\frac{d(CT)}{d(W)} = -\frac{n\times k}{D^*\times(W^*)^2}+\frac{i}{3}=0 \quad \therefore \quad \frac{i}{3}=\frac{n\times k}{D^*\times(W^*)^2} \quad \therefore \quad \frac{i}{3}=\frac{n\times k}{D^*\times W^*}\times\frac{1}{W^*}$. **(10)**

Substituindo **(10)** em **(09)**, encontra-se:

$$2\times\frac{n\times k}{D^*\times W^*}\times\frac{1}{W^*}=\frac{n\times k}{D^*\times W^*}\times\frac{1}{D^*} \quad \therefore \quad \frac{2}{W^*}=\frac{1}{D^*} \quad \therefore \quad W^* = 2D^*.$$

Lançando o resultado na equação **(09)**, tem-se:

$$2\times\frac{i}{3}=\frac{n\times k}{D^*\times(2D^*)}\times\frac{1}{D^*} \quad \therefore \quad \frac{2\times i}{3}=\frac{n\times k}{2\times(D^*)^3} \quad \therefore \quad (D^*)^3=\frac{3\times n\times k}{2\times 2\times i} \quad \therefore \quad D^*=\sqrt[3]{\frac{3\times n\times k}{4\times i}}.$$

Pode-se ressaltar que os valores <**D***> e <**W***> são aqueles resultantes das variáveis <**D**> e <**W**>, nos pontos extremos. Ainda, de acordo com as hipóteses estabelecidas chegou-se a conclusão que, expressa na equação **(02)**, a variância das movimentações aleatórias do saldo de caixa pode ser dada por: $\sigma^2 = n$. Então, resultará: $D^*=\sqrt[3]{\frac{3\times k\times\sigma^2}{4\times i}}$. **(11)**

Substituindo <**W**> por <**A – D**> na segunda equação, obtém-se:

$$A^* - D^* = W^* \therefore A^* - D^* = 2\times D^* \therefore A^* = 3\times D^*. \quad \textbf{(12)}$$

Conclusões gerais:

1. Se o saldo de caixa cair para zero, serão negociados títulos no valor de <**D***> unidades monetárias para recompor o saldo de caixa ao nível desejado.
2. Se o saldo de caixa alcançar o patamar <**3×D***>, a quantia <**2×D***> unidades monetárias será aplicada em títulos negociáveis.
3. O saldo médio de caixa foi visto que pode ser calculado pela equação: $Sd_{Med}=\frac{A+D}{3}$.

No caso da organização adotar a política de administração do caixa com base no nível desejado obtido <**D***>, o saldo médio de caixa passará a ser:

$Sd^*_{Med} = \frac{A^* + D^*}{3} = \frac{\left(3 \times D^*\right) + D^*}{3} = \frac{3D^* + D^*}{3}$ $\therefore$ $Sd^*_{Med} = \frac{4D^*}{3}$. Substituindo o saldo <**D***> pelo valor obtido em **(11)**, fica: $Sd^*_{Med} = \frac{4}{3} \times \sqrt[3]{\frac{3 \times k \times \sigma^2}{4 \times i}}$. **(13)**

5.5 Saldo mínimo de caixa diferente de zero

A proposição é estabelecer um limite inferior do intervalo de valores aceitos para o saldo de caixa que seja não nulo. Uma maneira para alcançar esse objetivo é adicionar ao caixa um valor correspondente ao menor saldo de caixa admitido. Essa estratégia acarreta num aumento de fundos ociosos no caixa. Em contrapartida, mantém o número de transferências previstas para a situação de saldo mínimo de caixa nulo. No modelo proposto, o custo oriundo do acréscimo de fundos ociosos no caixa será negligenciado. A conseqüência será simples deslocamento do intervalo de valores para o saldo de caixa em relação ao modelo desenvolvido por Miller e Orr (1966). Tomando-se <**B**> como o saldo mínimo de caixa admitido, o limite inferior se deslocará de zero (modelo original) para <**B**> (modelo proposto). A tabela a seguir mostra os saldos de caixa relevantes:

TABELA 1 – Saldos de caixa do modelo para saldo nulo e diferente de zero

	MODELO	
SALDO	Original	Proposto
Mínimo	0	B
Desejado	D^*	$B + D^*$
Máximo	A^*	$B + A^*$
Médio	Sd^*_{Med}	$B + Sd^*_{Med}$

Fonte: elaborado pelos autores

As observações permitirão chegar às conclusões a respeito da situação proposta:

1) Saldo desejado – D:

$D = B + D^*$ $\therefore$ $D = B + \sqrt[3]{\frac{3 \times k \times \sigma^2}{4 \times i}}$. **(14)**

2) Saldo máximo – A:

$A = B + A^*$; mas: $A^* = 3 \times D^*$ e $D^* = D - B$, então fica: $A = B + 3 \times D^*$ $\therefore$ $A = B + 3 \times (D - B)$ $\therefore$ $A = 3D - 2B$. **(15)**

3) Saldo médio – $Sd_{Méd}$:

$Sd_{Med} = B + Sd^*_{Med}$; mas sabe-se que: $Sd^*_{Med} = \frac{A^* + D^*}{3}$, logo, resulta:

$Sd_{Med} = B + \frac{A^* + D^*}{3} = B + \frac{(A - B) + (D - B)}{3} = \frac{3B + A + D - 2B}{3} = \frac{A + D + B}{3}$; de **(15)**, tem-se: $Sd_{Med} = \frac{(3D - 2B) + D + B}{3}$ $\therefore$ $Sd_{Med} = \frac{4D - B}{3}$. **(16)**

6 Conclusões

A pesquisa bibliográfica indicou que a literatura brasileira da área não contempla plenamente o modelo de caixa de Miller e Orr. A maioria dos textos consultados apresenta o referido modelo de caixa, mas apenas disserta sobre as características e premissas adotadas no modelo matemático. Mehta (1978) foi a exceção no aspecto de desenvolvimento do modelo. Deve-se ressaltar que a contribuição do portal mantido pela CAPES/MEC foi fundamental para pesquisa. Em síntese, a pesquisa bibliográfica foi satisfatória para o objetivo proposto e revelou ser oportuna a seqüência do trabalho.

Tomando-se por referência Mehta (1978), acrescido de outros textos, como o original (Miller e Orr, 1966) e o de continuidade (Miller e Orr, 1968), o trabalho apresenta uma alternativa de desenvolvimento matemático do modelo de caixa proposto por Miller e Orr. O segundo objetivo foi o de evidenciar as hipóteses restritivas e os aspectos negligenciados ou relaxados no modelo. Essa alternativa de desenvolvimento, além de se mostrar consistente, permitiu que os pressupostos básicos arbitrados por seus formuladores fossem ressaltados.

Apesar de o modelo de Miller e Orr poder ser considerado um avanço em relação ao de Baumol, também apresenta fragilidades devido às premissas adotadas. Essas provocaram uma série de questionamentos a esse modelo. Um dos aspectos vulneráveis do modelo refere-se ao custo de transferência possuir o mesmo valor, independente da quantia envolvida e do sentido (aplicação ou resgate) da operação. Outro ponto diz respeito à hipótese que, a cada período unitário, o saldo de caixa pode apenas oscilar uma quantia a mais ou a menos no saldo do período subseqüente. Ou seja, o modelo não admite que o saldo de caixa possa assumir outros níveis. Um outro aspecto restritivo é que o saldo de caixa no período atual depende apenas do nível em que estava no período anterior. Pode-se observar que o modelo constitui um processo estocástico de um estágio para dois estados. Outra vulnerabilidade é relativa à duração do ciclo considerado. Como já exposto, o modelo exige que o número de observações <**n**> do saldo de caixa ao longo do ciclo seja considerado grande. Durante esse intervalo de tempo, podem ocorrer variações do patamar de entradas e saídas de caixa. Essa possibilidade não pode ser atendida pelo modelo, pois o desvio padrão adotado no início condiciona um intervalo de valores aceitos e não permite ajustes durante o ciclo em curso. Um outro fator limitante refere-se à previsibilidade das entradas e saídas de caixa. Existem demandas e ofertas que são praticamente certas, outras que são previsíveis e há ainda aquelas aleatórias, como discutido por Villalba e Sousa (2001, p. 2). Outro ponto que pode ser interpretado como restritivo ao modelo refere-se à aplicação de fundos ociosos. O modelo clássico considera a existência de apenas um ativo, enquanto o mercado financeiro oferece uma série de opções. Pode ocorrer que organizações, mesmo possuindo uma central, mantenham várias contas para movimentar fundos. Esse caso é particularmente verdadeiro para empresas que possuam filiais. Deve-se ressaltar que várias limitações do modelo e foram citadas no trabalho original, principalmente na terceira seção (p. 429-433).

A pesquisa propiciou vislumbrar outras vertentes passíveis de serem exploradas em novos estudos. Uma sugestão é verificar o desenvolvimento do modelo para o caso de custo de conversão variável conforme a quantia transferida na operação. Uma outra perspectiva a explorar refere-se à condição admitida de equações de diferenças com solução linear.

8 Referências bibliográficas

ASSAF NETO, A. e SILVA, C. A. T. **Administração do capital de giro**. São Paulo: Atlas, 1997. 200 p.

ASSAF NETO, A. **Finanças corporativas e valor**. São Paulo: Atlas, 2003. 609 p.

BAUMOL, W. J. The transactions demand for cash: an inventory theoretic approach. **Quarterly Journal of Economics**, v.66, nov. 1952.

BREALEY, R.A., MYERS, S. C. e MARCUS, A. J. **Fundamentos da administração financeira**. 3 ed. Rio de Janeiro: McGraw Hill, 2001. 807 p.

COSTA JR., N. C. A. da e SAURIN, V. Modelos de administração de caixa. **Revista de Administração de Empresas – RAE Light**. v. 34, n.2, mar./abr. 1994.

FELLER, W. **An introduction to probability theory and its applications**. v 1. 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 1968. 509 p.

FERREIRA, A. B. de H. **Novo Aurélio** – o dicionário Aurélio básico da língua portuguesa/Século XXI. Rio de Janeiro: Nova Fronteira: 1999. 2128 p.
GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3 ed. São Paulo: Atlas, 1996. 159 p.
GOLDBERG, S. **Introduction to difference equations**. New York: John Wiley & Sons, 1958. 200 p.
LAVILLE, C. e DIONNE, J. **Construção do saber** – manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre: Artmed, 1999. 340 p.
LEMES JÚNIOR, A. B., RIGO, C. M. e CHEROBIM, A. P. M. S. **Administração financeira** – princípios, fundamentos e práticas brasileiras. Rio de Janeiro: Campus, 2002. 698 p.
MATIAS, A.B. (COORD.) **Finanças corporativas de curto prazo** – a gestão do valor do capital de giro. São Paulo: Atlas, 2007. 285 p.
MATSUMOTO, A. S. e LIMA, J. P. de A. A determinação do saldo ótimo de caixa através dos modelos Baumol e de Miller-Orr: uma aplicação prática. In: CONGRESSO USP INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM CONTABILIDADE, 2. **Anais**... São Paulo: CONGRESSOUSPFIPECAFI, 2005. Disponível em: <http://www.congressousp.fipecafi.org/artigo22005/113>. Acesso em: 12 abr. 2010.
MEHTA, D. R. **Administração de capital de giro**. São Paulo: Atlas, 1978. 198 p
MILLER, M. H. e ORR, D. A model of demand for money by firms. **Quarterly Journal of Economics**, ago. 1966.
MILLER, M. H. e ORR, D. Mathematical models for financial management. In: SMITH, K. V. (Org.). **Management of working capital**. Saint Paul: West Publishing, 1974.
MILLER, M. H. e ORR, D. The demand for money by firms: extensions of analytic results. **Journal of Finance**, dec. 1968.
Revista brasileira de finanças – RBFin, v.1, n.1 – v.8, n.1; 2003–2010 . Disponível em: <http://virtualbib.fgv.br/ojs/index.php/rbfin>. Acesso em: 12 abr. 2010.
Revista de administração contemporânea – RAC, v.1, n.1 – v.14, n.2; 1997–2010. Disponível em: <http://www.anpad.org.br>. Acesso em: 12 abr. 2010.
Revista de administração da Universidade de São Paulo – RAUSP, v.12, n.1 – v.45, n.1; 1977–2010. Disponível em: <http://www.rausp.usp.br>. Acesso em: 12 abr. 2010.
Revista de administração de empresas – RAE, v.1, n.1 – v.50, n.1; 1961–2010. Disponível em: <http://www16.fgv.br/rae/rae/index.cfm>. Acesso: 12 abr. 2010.
Revista de administração Mackenzie – RAM, v.1, n.1 – v11, n.1; 2000–2010. Disponível em: <http://www.read.adm.ufrgs.br>. Acesso: 12 abr. 2010.
Revista de contabilidade & finanças, n.25 – n.51; 2001–2010. Disponível em: <http://www.eac.fea.usp.br/eac/revista>. Acesso em: 12 abr. 2010.
Revista eletrônica de administração – READ, v.1, n.1 – v16, n.1; 1995–2010. Disponível em: <http://www.read.adm.ufrgs.br>. Acesso: 12 abr. 2010.
ROSS, S. A., WESTERFIELD, R. W. e JAFFE, J. F. **Administração financeira** – corporate finance. São Paulo: Atlas, 1995. 698 p.
SOUSA, A. F. de e ABRANTES FILHO, G. Administração de disponível – aplicação prática do modelo de otimização de Miller-Orr. In: SEMINÁRIO EM ADMINISTRAÇÃO FEA-USP, 3. **Anais**... São Paulo: SEMEAD, 1998. Disponível em: <http://www.ead.fea.usp.br/Semead/3semead/Financas>. Acesso em: 30 mai. 2007.
STEVENSON, W. J. **Estatística aplicada à administração**. São Paulo: HARBRA, 1986. 495 p.
VILLALBA, G. B. e SOUSA, A. F. de. Modelos de administração de caixa – análise empírica. In: SEMINÁRIO EM ADMINISTRAÇÃO FEA-USP, 5. **Anais**... São Paulo: SEMEAD, 2001. Disponível em: <http://www.ead.fea.usp.br/semead/5semead/>. Acesso em: 12 abr. 2010.