

Área Temática: FINANÇAS

Título: TEORIA DO PORTFÓLIO PÓS-MODERNA: UM ESTUDO SOBRE A SEMIVARIÂNCIA

AUTORES

ALCIDES CARLOS DE ARAUJO

Universidade de São Paulo
alcides.carlos@yahoo.com.br

ALESSANDRA DE AVILA MONTINI

Universidade de São Paulo
amontini@usp.br

JOSÉ ROBERTO SECURATO

Universidade de São Paulo
securato@usp.br

RESUMO

Os recentes avanços nos modelos de finanças (consideração da anormalidade das distribuições e observação do *downside risk*) remontam para uma nova fase de estudos, ou seja, uma passagem da moderna teoria do portfólio para uma teoria do portfólio pós-moderna. Este artigo comparou diferentes estimativas para o cálculo da semivariância de uma carteira de ações. Foram avaliados três modelos: o modelo de matriz assimétrica (HOGAN e WARREN,1972), matriz endógena (ESTRADA, 2008) e a heurística (aproximação) proposta por Estrada (2008). A metodologia seguiu uma divisão de 3 subperíodos para análise, simulação de 1000 carteiras com 5, 4 e 3 ativos e comparações – modelo assimétrico x heurística; modelo endógeno x heurística. Os resultados mostraram diferenças significativas entre os modelos, sendo que a heurística proposta tende a superestimar o risco do portfólio em relação aos cálculos exatos. Como trabalhos futuros, existe a necessidade de comparar os modelos quanto a forma de construir as carteiras; além do desafio de encontrar um método para diminuir as diferenças entre a heurística proposta por Estrada (2008) e os modelos exatos (matrizes assimétricas e endógenas).

Palavras-chave: Teoria do Portfólio, Downside Risk, Semivariância

ABSTRACT

The recent advances in models of finance (how to consider the abnormality of return's distributions and downside risk analysis) bring to a new moment of research, the transition for the Modern Portfolio Theory (MPT) to the Post Modern Portfolio Theory (PMPT). This article compared different models for the portfolio asset semivariance. Three models were analyzed: the asymmetric matrix (HOGAN; WARREN,1972), the endogenous matrix (ESTRADA, 2008) and the heuristic (approximation) proposed by Estrada (2008). The methodology was: analysis of three periods, simulation of 1000 portfolios with 5, 4 and 3 assets; the models asymmetric x heuristic and endogenous x heuristic was compared. The results showed significant difference between the models, the heuristic proposed tends to overestimate the portfolio risk compared to exact calculation. The future research may examine the portfolios' composition in the three models; others work could increase the heuristic proposed by Estrada

(2008) with objectives to reduce the difference between the approximation and the exact models (asymmetric and endogenous matrix).

1. Introdução

O artigo seminal de Markowitz (1952) provocou uma mudança radical na forma de analisar o problema de formação de portfólios de ações. Diversos direcionamentos formados na teoria, conjuntamente explorados por outros pesquisadores clássicos como Sharpe (1964) e Lintner (1965), provocaram dúvidas, discussões e questionamentos; tendo como produto uma gama de livros e artigos que formaram a moderna teoria do portfólio.

Em relação aos problemas de estudos Roman e Mitra (2008) citam 3 áreas gerais de pesquisa neste campo. A primeira, o estudo sobre as formas das distribuições dos retornos dos ativos; a segunda, seleção dos ativos com objetivos de maximizar retornos ou minimizar riscos; por último, como rebalancear as composições dos ativos no tempo. No presente texto, o foco ocorre na segunda questão.

Quanto à seleção dos ativos, diversos modelos foram desenvolvidos como, por exemplo: média-variância e maximização da função utilidade quadrática. O ponto de forte discussão nestes modelos é o uso da variância e desvio-padrão como medidas de risco; entretanto, segundo Markowitz (1959) a utilização de outra medida chamada semivariância produziria melhores composições de carteiras. A partir disto, diversos pesquisadores iniciam seus inúmeros questionamentos e análises sobre o modelo.

A sugestão de Markowitz (1959) foi baseada a partir das próprias limitações de seu modelo inicial, como a suposição de racionalidade dos investidores e distribuição normal dos ativos. Contudo, outras suposições em relação ao comportamento dos investidores em relação ao risco foram descritas; como, por exemplo, Roy (1952) apresenta o conceito de *safety first*, preferir a primeira alternativa que minimize a chance do desastre (perda), ou seja, o foco de maximizar riqueza é modificado para um comportamento de manter a riqueza existente e aceitar um retorno maior desde que o patrimônio atual não seja comprometido. Kahneman e Tversky (1979), em suas análises no estudo sobre *Prospect Theory*, apresentam a aparente falta de racionalidade de investidores quanto a estruturação, ou seja, um problema demonstrado como ganhos pode levar a escolhas diferentes em relação ao mesmo problema estruturado como perdas.

Quanto a suposição da normalidade, pode-se destacar o trabalho de Castro Junior e Silveira (2009), segundo os autores, os testes sobre as distribuições dos retornos das ações no mercado brasileiro, mesmo utilizando um período de tempo extenso, não demonstraram aderência a normalidade. Deste modo, existiu uma recomendação sobre não utilizar pressuposições sobre as distribuições dos retornos.

Mediante tais implicações a variância como uma medida de risco é amplamente criticada tanto pelo comportamento do investidor quanto pelas medidas estatísticas. O primeiro questionamento seria pela capacidade de considerar como risco tanto os retornos acima da média (*upside*) quanto as taxas abaixo da média (*downside*); sendo que investidores avaliam como alternativa arriscada somente as variações abaixo de um valor especificado (*downside*). Em relação as medidas estatísticas, a variância se torna coerente quando a distribuição dos retornos é simétrica e normal, outro ponto em que os teste empíricos não evidenciam (HOGAN e WARREN, 1972; CHOUBINEH e BRANTING, 1986; JARROW e ZHAO, 2006; ESTRADA, 2007; ESTRADA, 2008).

A medida que o modelo apresentado por Markowitz (1952) desenvolveu-se durante o tempo, percebe-se que, paralelamente, as críticas também ocorreram; contudo, não impediram a expansão, pelo contrário, adicionaram novos conceitos e incrementaram os estudos sobre a teoria do portfólio. Alguns dos “novos” modelos que consideram o *downside risk* e distribuições de retornos assimétricas são LPM (*Lower Partial Moment*), VaR (*Value at Risk*) e CVaR (*Conditional Value at Risk*); os referidos modelos, viabilizados pelas capacidades computacionais da atualidade conjuntamente com os avanços na teoria, constituem a chamada

Post-Modern Portfolio Theory (ROM e FERGUSON, 1994; GROOTVELD e HALLERBACH, 1999; ROMAN e MITRA, 2009).

O presente trabalho possui objetivo de avaliar as heurísticas apresentadas por Estrada (2008) para o cálculo da matriz de semivariância-semicovariância. Segundo o próprio autor, otimização de portfólios através da semivariância torna-se complicada pela matriz ser assimétrica (ver HOGAN e WARREN, 1974; ATHAYDE, 2001) e endógena (semicovariâncias se modificam de acordo com os pesos alocados nos ativos).

A utilização de heurísticas se torna importante para fins de implementação; contudo, no artigo de Estrada (2008) não foram constatadas algumas análises importantes para avaliar a eficiência do modelo. Percebe-se que o chamado cálculo endógeno foi comparado com a heurística, porém, a implementação deixou de considerar a natureza assimétrica da matriz de covariância; demonstrada nos trabalhos de Hogan e Warren (1972, 1974). Ou seja, Estrada (2008) comparou um modelo que simplifica o problema da assimetria, mas ainda com matriz endógena, com a heurística comentada no artigo que soluciona os dois problemas.

O dilema na simplificação de cálculos seria no grau de erro gerado em relação a abordagem exata, Cheremushkin (2009) critica duramente o trabalho de Estrada, além de demonstrar a tendência da heurística apresentar valores mais altos em relação ao cálculo exato. Estrada (2008) apresenta a tendência nos cálculos, porém aloca pouca importância neste problema; Cheremushkin (2009) apresenta suas críticas de forma conceitual, contudo, não realiza os testes estatísticos para comparação, além de avaliar somente o modelo endógeno com a heurística; deste modo, avaliar se existe uma diferença significativa entre os modelos é o principal objetivo do trabalho.

Nos próximos tópicos serão revisados os conceitos da otimização por média-variância, os cálculos da semivariância e semi-covariância, os tópicos metodológicos e os resultados da pesquisa.

2. Revisão Bibliográfica

2.1 Média-Variância

Um dos modelos mais antigos sobre administração de carteiras, sendo também um dos mais comentados na literatura, foi apresentado por Markowitz (1952). Este conceito que proporcionou as principais bases para a moderna teoria financeira, também chamada teoria do portfólio. O enfoque do modelo é a análise dos riscos e dos retornos dos ativos, sendo a variância e o desvio-padrão os componentes do risco e a média (valor esperado) como signo do retorno.

O retorno da carteira pode ser analisado a partir dos retornos passados dos títulos individuais e dos respectivos percentuais alocados nos ativos. A forma de cálculo é representada abaixo:

$$E(r_c) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i);$$

onde :

$E(r_c)$: Retorno esperado da carteira;

$E(r_i)$: Retorno esperado do ativo i ;

w_i : Porcentual do valor total investido no ativo i .

Quanto aos riscos, estes podem ser calculados a partir da dispersão dos resultados das ações em relação aos seus retornos médios, ou seja, o grau de variação dos retornos define

o grau de risco do investimento. Da mesma forma que os retornos dos ativos individuais influenciam o retorno esperado do portfólio, a variância dos retornos de cada título prepondera sobre o risco total da carteira. Observamos isto, na fórmula abaixo, esta demonstra a soma ponderada das variâncias.

$$\sigma^2 = \sum_{j,i=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j;$$

onde :

w_i : percentual do valor total investido no ativo i ;

σ^2 : variância da carteira;

σ_{ij} : covariância entre os ativos i e j .

Percebe-se, na fórmula acima, mais um componente de poderosa influência no risco de uma carteira, a covariância; demonstra-se que a variabilidade de um portfólio também dependerá da forma como seus componentes se interrelacionam (ASSAF NETO, 2003). O problema geral do modelo é encontrar a composição ótima da carteira dado um retorno ou risco específico (máximo retorno ou mínimo risco).

A resolução do problema torna-se possível através de programação quadrática, buscando-se otimizar o modelo abaixo. (CASSAROTO FILHO e KOPITTKE, 1998; LUENBERGER, 1998; COSTA e ASSUNÇÃO, 2005).

$$\text{Min} \sum_{j,i=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n w_i E(r_i) = E(r_c)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$1 \geq w_i \geq 0$$

O modelo acima implica na minimização do risco dado um nível de retorno desejado, sendo que os percentuais alocados devem obter somatório igual a 1. Admitindo-se suposição de não-nulidade para os respectivos pesos.

2.2 Semivariância

A idéia da análise focada no lado das perdas (*downside risk*), quando se trata em investimentos em ações, remonta desde 1952 quando Roy escreveu sobre o critério *safety first* (NAWROCKI, 1999); segundo Mitra e Roman (2008) foi a primeira vez que o termo risco abaixo do retorno alvo foi citado.

Em termos conceituais, Roy (1952), ao criticar sobre a função utilidade e o comportamento do investidor, apresentou sobre a preferência por investimentos que possuam as menores chances de evidenciar retornos abaixo de algum nível esperado. Em forma de função isto pode ser observado do seguinte modo:

$Min P(R_i < \tau)$;
 P – probabilidade;
 R_i – retorno do ativo;
 τ – retorno alvo

Segundo Nawrocki (1999) Markowitz reconheceu a idéia em 1959, quando propôs a semivariância como uma medida de risco mais adequada, tanto por representar algo mais aproximado do comportamento do consumidor e melhor se adequar quando os retornos dos ativos não são normais. Contudo, no período das publicações de Markowitz e Roy as otimizações necessitavam de um tempo computacional inviável, de modo que o modelo por média-variância foi aceito mais rapidamente.

Nos últimos anos as discussões sobre o tema *downside risk* cresceram substancialmente, principalmente, com os avanços computacionais da atualidade. Diversos modelos como LPM - *Lower Partial Moment*, VaR e CVaR foram desenvolvidos seguindo destas idéias originárias dos anos 50, sendo que nos últimos anos os pesquisadores estão tratando o tema como PMPT – *Post Modern Portfolio Theory* (ROM e FERGUSON, 1994; SORTINO e SATCHELL, 2001; ROMAN e MITRA, 2008).

Quanto a semivariância, pesquisadores como Sing e Ong (2000) e Nawrocki (2007) tratam o tema sob a ótica da família LPM (maiores detalhes ver Bawa e Lindenberg, 1977). A formulação pode ser vista abaixo:

$$SV = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T [\text{Min}(R_i - \tau, 0)]^2;$$

$$\text{sendo: } \begin{cases} R_i - \tau, & \text{se } R_i - \tau \leq 0 \\ 0, & \text{se } R_i - \tau > 0 \end{cases}$$

Segundo o modelo acima, a semivariância é calculada a partir de um retorno alvo τ que pode ser representado pela média do ativo, uma taxa livre de risco, um *benchmarking* (como o Ibovespa) ou mesmo o zero. O que torna um problema nos cálculos é a chamada semi-covariância; Hogan e Warren (1974) realizam as derivações e encontram a seguinte estrutura:

$$CSV = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T [(R_i - R_f) \cdot \text{Min}(R_i - R_f, 0)] \quad (1)$$

A partir da observação do modelo acima percebe-se que $CSV R_{i,j} \neq CSV R_{j,i}$, ou seja, a matriz de semivariâncias e semi-covariâncias (SV) se torna assimétrica, o que dificulta implementar o modelo convencional de otimização proposto por Markowitz. Outro problema é apresentado por Estrada (2008), no caso em questão a semivariância é calculada diretamente para o portfólio, como é visto no modelo a baixo.

$$SV = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T [\text{Min}(RP_i - \tau, 0)]^2 \quad (2)$$

Neste caso, o cálculo se torna problemático porque a cada diferente composição de carteiras novos semi-desvios ocorrem; isto se torna complicado quando é necessário conhecer de “antemão” a matriz SV. Diante das proposições acima, Athayde (2001) e Estrada (2008) descrevem o problema da semi-covariância, ou seja, a matriz SV é assimétrica e endógena. A assimetria dificulta uma pré e pós multiplicação dos pesos pelos riscos dos ativos (matrizes não positivas definidas, ver “arrumar algum livro”); quanto a matriz SV ser endógena, cada composição gera uma nova matriz, sendo assim, o ponto ótimo pode não ser tão ótimo.

Visto o problema apresentado diversos pesquisadores propõem variadas formas de resolução, desde cálculos exatos até simplificações; o quadro 1 mostra alguns dos trabalhos.

Quadro 1 – Proposições de cálculos

Autores	Propostas
Hogan e Warren (1972)	Algoritmo de Frank-Wolf
Hogan e Warren (1974)	Matriz de semivariância assimétrica
Ang (1975)	Programação linear
Elton, Gruber e Padberg (1976)	Heurística correlação constante
Nawrocki (1983)	Uso de matriz diagonal com semivariâncias
Nawrocki (1989)	Semivariância como caso específico do LPM - Lower Partial Moment
Markowitz (1993)	Transforma o problema da semivariância num problema quadrático
Athayde (2001)	Abordagem não paramétrica
Ballesteros (2005)	Aplica métodos de programação quadrática paramétrica

Fonte: Nawrocki (2007); Estrada (2008)

Mediante os diversos casos apresentados no quadro 1, percebe-se os variados modelos existentes; sendo assim, a proposição de mais um modelo poderia ser pouco significativa. Contudo, o modelo de Estrada (2008) se torna importante pelo conjunto de trabalhos que utilizaram a heurística; o próprio Estrada faz uma sequencia de artigos nos anos de 2002, 2006 e 2007 somente utilizando a simplificação, em 2008 discute especificamente sobre o modelo. No Brasil, encontra-se os trabalhos de Lucena e Motta (2004), Lucena e Figueiredo (2008) e Fortunato et al (2010) que também utilizam a heurística, porém não comentam as especificidades do modelo. A formulação é visualizada abaixo.

$$CSV = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T [Mm(R_i - r, 0) \cdot Mm(R_j - r, 0)] \quad (3)$$

Como se percebe, tanto problema da assimetria quanto o da matriz endógena foram resolvidos; a partir disto, torna-se possível a otimização conforme os direcionamentos de Markowitz. Entretanto, conforme resultados de Estrada (2008), nesta abordagem existe um grau de erro no cálculo do risco da carteira em relação a formulação do modelo exato, mas não são apresentados os testes estatísticos que avaliam este grau de erro.

Cheremushkin (2009) comenta sobre a heurística apresentada por Estrada, porém, especificamente sobre os trabalhos de 2002 a 2007. As críticas citadas no trabalho são duras, por exemplo: “*the cosemivariance formula is evidently incorrect and is useless in portfolio selection*”. No trabalho são comparados o modelo endógeno e a heurística; conforme o cálculo exato do risco da carteira encontra-se o valor de 22,4%, enquanto na heurística um valor de 23,2%, o que também evidencia o grau de erro; entretanto, não significa estatisticamente o “grande engano” citado no trabalho.

3. Metodologia

O presente trabalho trata-se de um estudo quantitativo de caráter descritivo com o objetivo de apresentar e analisar a abordagem heurística proposta por Estrada (2002, 2006, 2007, 2008) para o cálculo e minimização da semivariância. Neste caso, o objetivo foi comparar os modelos das equações 1, 2 e 3, ou seja, avaliar se o grau de erro do modelo heurístico é estatisticamente diferente dos modelos com matriz de semi-covariâncias assimétricas e endógenas. Vale ressaltar que estudos anteriores, como o de Estrada (2008) e Cheremushkin (2009) somente descreveram o modelo e citaram as críticas respectivamente, porém não apresentaram as medidas estatísticas.

Para realizar as comparações, dados de ações da Bovespa e do Ibovespa no período de 18/09/2009 a 09/04/2010 foram coletados. Todos os dados sobre as ações e índices diários e mensais foram acessados pelo banco de dados do Economática; o quadro 2 apresenta os ativos do estudo. A partir da observação do comportamento do Ibovespa, três sub-períodos foram selecionados para as análises.

Quadro 2 – Dados da pesquisa

Ações
Bradesco ON
Itausa ON
Perdigao ON
JBS ON
Marcopolo ON
Gerdau ON
Pão de açúcar PNA
Lojas Americanas PN

Fonte: Economática

Para análise dos dados foi adotado o procedimento realizado por Estrada (2008), ou seja, foram geradas carteiras com 3, 4 e 5 ativos, depois calculados os riscos através do modelo assimétrico (equação 1), matriz endógena (equação 2) e a abordagem heurística (equação 3). Com objetivos de montar portfólios com títulos possuindo retornos com diferentes distribuições de probabilidade, a seleção dos ativos que participaram das carteiras ocorreu através da medição dos índices de assimetria. Deste modo, no caso de 3 ativos, um possuiu assimetria positiva, outro assimetria negativa e outro sem assimetria; para 4 ativos: 2 possuíram assimetria positiva e outros 2 assimetria negativa; para 5 ativos: 2 possuíram assimetria positiva, 2 assimetria negativa e outro sem assimetria.

Em cada processo foram simuladas 1000 carteiras aleatórias através do software @Risk e calculadas automaticamente as semivariâncias segundo os critérios citados. Para comparação dos modelos foram realizadas as estatísticas *t* de *student* e teste de sinal Wilcoxon para amostras pareadas; segundo Siegel (1976) o teste considera o valor das diferenças entre as variáveis, procedimento muito importante para o objetivo do artigo. Para os cálculos das assimetrias e dos testes de comparação foi utilizado o software SPSS 17.0.

4. Resultados

4.1 Seleção dos períodos das análises

Para realizar as comparações das carteiras seguindo o método demonstrado em Estrada (2008) foram selecionados sub-períodos contendo informações de 30 dias dos retornos das ações. A partir do comportamento do Ibovespa (gráfico 1) foi possível separar

três períodos distintos; no mais recente – período 1 (18/02/2010 – 09/04/2010) – encontra-se o índice num momento de crescimento. No segundo período (02/12/2009 – 12/02/2010) são visualizados uma fase de subida logo após um declínio sequencial; o terceiro período ocorre 2 movimentos de crescimento e uma fase rápida de quebra na série.

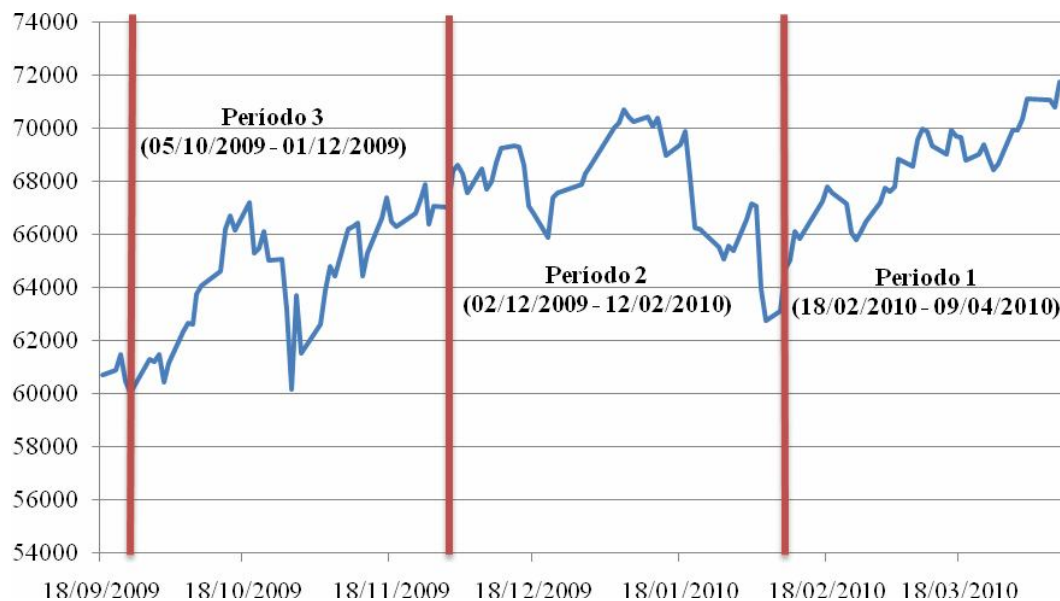


Gráfico 1 – Comportamento Ibovespa 18/09/2009 – 09/04/2010

Nos próximos tópicos serão apresentadas as comparações dos modelos em cada sub-período, neste caso, serão priorizados os tempos mais recentes para os mais antigos.

4.1 Período de 18/02/2010 a 09/04/2010

Para avaliar quais ativos deveriam compor cada uma das carteiras foram analisadas suas medidas descritivas. Como um primeiro passo foram observadas variações das ações entre os dias 18/02/2010 a 09/04/2010 para observar o grau de assimetria; na tabela 1 são visualizados os resultados.

Tabela 1 – Análises descritivas (18/02/2010 a 09/04/2010)

Ações	N	Média	Desvio-padrão	Assimetria
Bradesco*	30	-0,0145%	1,0670%	0,2160
Itausa*	30	0,0139%	1,4061%	-1,0050
Perdigão*	30	0,1837%	1,2560%	0,9150
JBS*	30	-0,2978%	2,7364%	0,1250
Marcopolo	30	0,1773%	1,5181%	0,4240
Gerdau	30	0,3096%	1,6592%	0,9140
P. Açúcar*	30	0,0186%	1,6302%	1,0480
L. Americanas	30	0,1133%	0,8435%	0,5680

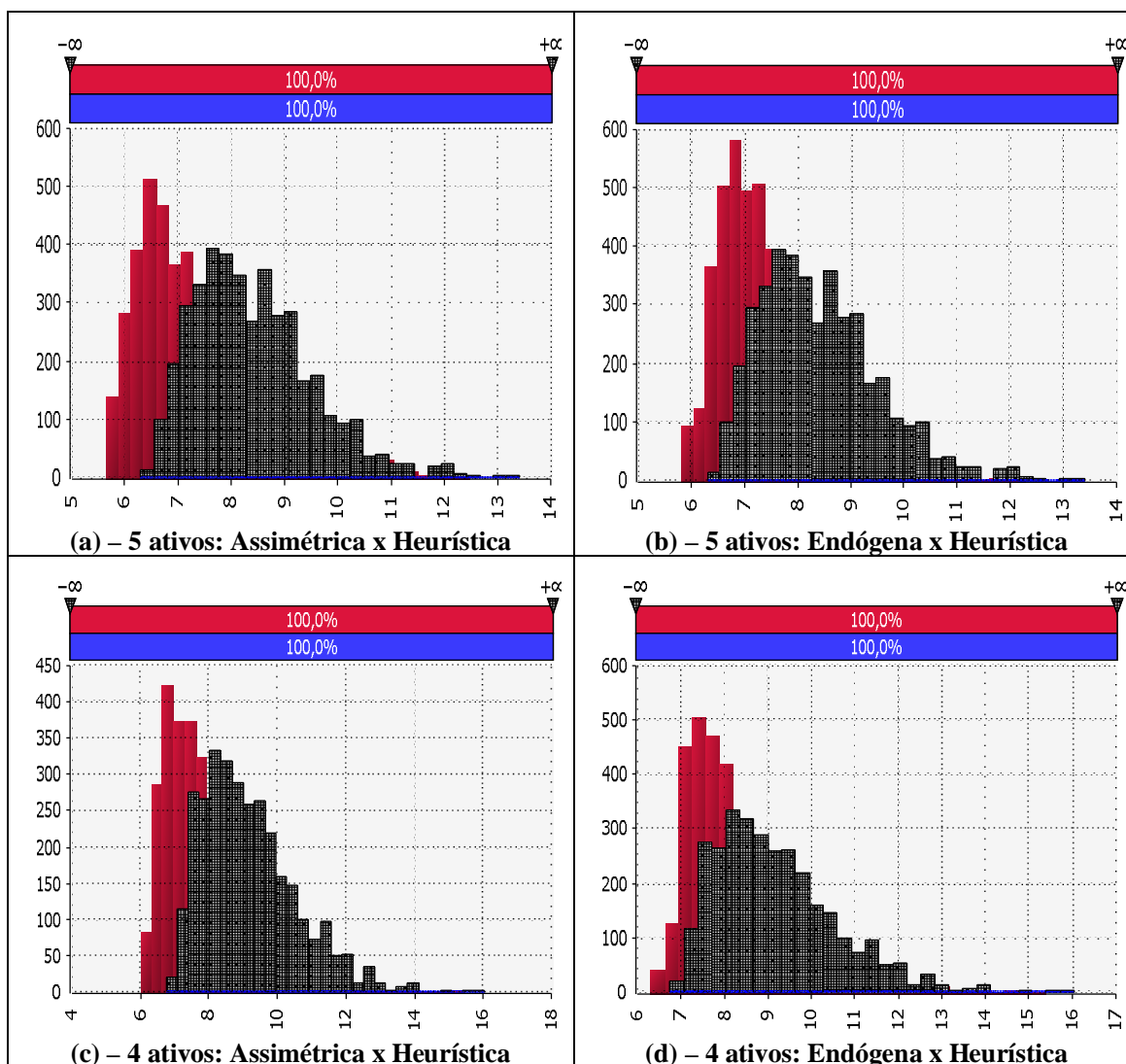
*Ativos na carteira

Fonte: dados da pesquisa

A partir da tabela 1 pode-se considerar os ativos para a composição das carteiras de 5, 4 e 3 ações. Seguindo os critérios apresentados na metodologia, a única ação com alto grau

de assimetria negativa é a “Itausa” (-1,005), deste modo, este ativo estará presente em todos os portfólios; outra ação com característica importante para análises é “P. açúcar”, neste caso, o ativo que possui o maior grau de assimetria positiva (1,048).

Diante destas considerações, para a carteira de 5 ativos foram selecionados: Itausa, P.açúcar, JBS, Perdigão e Bradesco (como não existiu outra ação com grau de assimetria negativa, escolheu a 2ª menor assimetria). Para a carteira de 4 ativos foram selecionados: Itausa, P.açucar, Perdigão e JBS (como não houve outra ação com assimetria negativa, escolheu a que possui o menor grau de assimetria). Para a carteira de 3 ativos foram selecionados: Itausa, P.açúcar e JBS. Na figura 1 são apresentados os resultados das simulações nas 1000 carteiras aleatórias, utilizando-se os cálculos das semivariâncias das equações 1, 2 e 3.



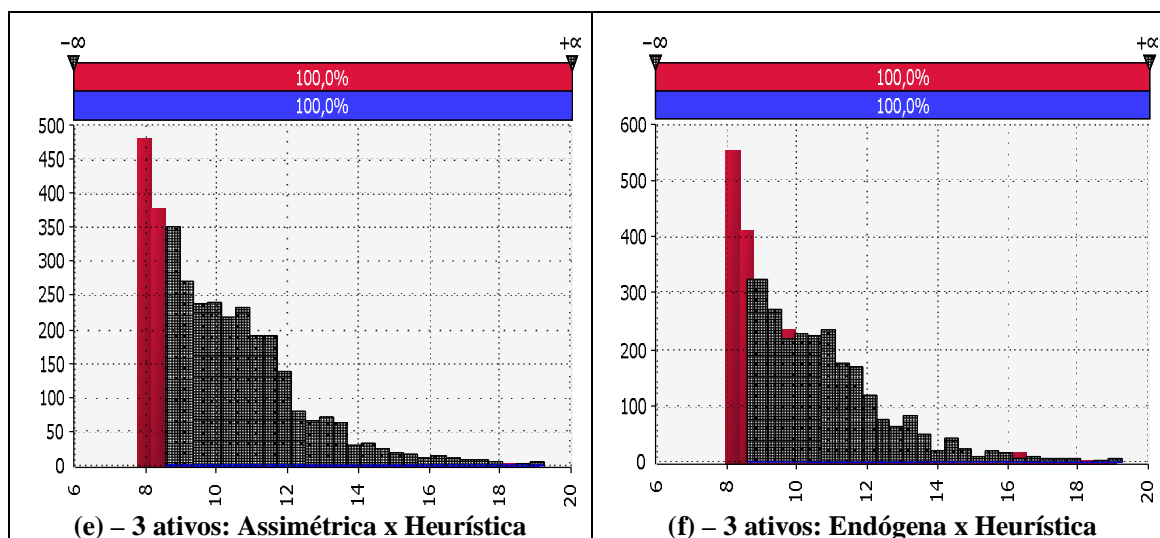


Figura 1 – Comportamentos das carteiras

Fonte: dados das simulações

Através da avaliação dos gráficos percebe-se as diferenças entre as medidas; os riscos dos portfólios calculados a partir da heurística possuem menor altura e maior cauda a direita em relação aos modelos formados com a matriz assimétrica e a matriz endógena. Diante disto, verifica-se a tendência do modelo heurístico superestimar o risco em relação as equações 1 e 2; algo citado de forma breve nos estudos de Estrada (2008) e Cheremushkin (2009), porém, não da forma como é demonstrado na figura 1. Também observa-se a medida que o número de ativos nas carteiras decrescem, as diferenças entre os modelos tendem a diminuir, contudo, o decaimento demonstra-se muito pequeno.

No trabalho de Estrada (2008) também se verifica a ocorrência no aumento do erro entre os modelos e o aumento do número de ativos no portfólio; entretanto, não é dada atenção a este aspecto. Um ponto comum entre as análises deste artigo e o trabalho de Estrada (2008) seria o grau de correlação entre os modelos, do mesmo modo que as carteiras são altamente correlacionadas (muito próximas de 1) no trabalho do autor comentado, no presente artigo também ocorre este fenômeno; isto pode ser visualizado na tabela 2.

Tabela 2 – Comparações entre os modelos

Quant. Ativos	Comparação	Correlação	Teste de Wilcoxon	<i>p</i>
5	Assimétrico x Heurístico	0,983	-27,514	0,00
5	Endógeno x Heurístico	0,964	-27,458	0,00
4	Assimétrico x Heurístico	0,977	-27,544	0,00
4	Endógeno x Heurístico	0,974	-27,460	0,00
3	Assimétrico x Heurístico	0,977	-27,475	0,00
3	Endógeno x Heurístico	0,976	-27,437	0,00

Fonte: dados das simulações

A partir das informações da tabela 2 também são visualizadas as comparações dos modelos nas diferentes carteiras formadas. Para conhecer se as diferenças foram significativas entre os portfólios o teste de Wilcoxon foi utilizado, como se percebe, em todos os modelos as diferenças foram significativas ao nível de 0,001. Diante dos resultados pode-se afirmar a superestimação da heurística em relação aos modelos de matriz de semi-covariância assimétrica e endógena.

Estrada (2008) descreve sobre o grau de erro entre os modelos serem insignificantes sem apresentar os testes estatísticos pertinentes; Cheremushkin (2009) demonstra forte desconfiança no modelo de Estrada, principalmente sobre a acurácia da aproximação. Pelas análises realizadas dentro do período específico (dias 18/02/2010 a 09/04/2010) as semivariâncias dos portfólios apresentaram formas de distribuição semelhantes, além dos modelos serem altamente correlacionados; contudo, os valores tenderam a ser significativamente diferentes.

4.2 Período de 02/12/2009 - 12/02/2010

No segundo subperíodo de análise as características das ações foram diferentes em relação ao período análise anterior. A tabela 3 apresenta as análises descritivas das ações.

Tabela 3 – Análises descritivas (02/12/2009 - 12/02/2010)

Ações	N	Média	Desvio-padrão	Assimetria
Bradesco*	30	-0,431%	1,665%	0,099
Itausa	30	0,334%	2,180%	0,292
Perdigão	30	0,309%	1,657%	0,200
JBS*	30	-0,568%	2,989%	-0,090
Marcopolo*	30	0,336%	2,289%	1,547
Gerdau*	30	-0,402%	2,266%	0,264
P. Açúcar*	30	0,032%	2,652%	1,424
L. Americanas	30	-0,480%	2,142%	0,274

*Ativos na carteira

Fonte: dados da pesquisa

Neste caso, novamente uma única ação apresentou grau de assimetria negativa (JBS), sendo ainda um valor muito baixo. Como destaque para a assimetria positiva, existem as ações P. Açúcar e Marcopolo. Os portfólios de análises formados tiveram as seguintes composições; 5 - Marcopolo, pão de açúcar, JBS, Bradesco, Gerdau; 4 - Marcopolo, pão de açúcar, JBS, Bradesco; 3 - Marcopolo, JBS, Bradesco. Os resultados das comparações são visualizados na tabela 4.

Tabela 4 – Comparação dos modelos

Quant. Ativos	Comparação	Testes	p
5	Assimétrico x Heurístico	107,390	0,000
5	Endógeno x Heurístico	124,240	0,000
4	Assimétrico x Heurístico	-27,411	0,000
4	Endógeno x Heurístico	-27,433	0,000
3	Assimétrico x Heurístico	-27,400	0,000
3	Endógeno x Heurístico	-27,484	0,000

Fonte: dados das simulações

Nas comparações das carteiras com 5 ativos foram utilizadas as estatísticas *t* de *student*, nas demais, a prova não paramétrica de Wilcoxon. Como se percebe, novamente existiram diferenças significativas entre os modelos, ou seja, o modelo heurístico, no período de análise, superestima o risco dos portfólios em relação as equações 1 e 2.

4.3 Período de 05/10/2009 - 01/12/2009

Por último, as mesmas análises foram repetidas no período 3 (05/10/2009 – 01/12/2009), novamente as estatísticas descritivas (média, desvio-padrão e assimetria) foram levantadas. A tabela 5 resume os resultados.

Tabela 5 – Análises descritivas (05/10/2009 - 01/12/2009)

Ações	N	Média	Desvio-padrão	Assimetria
Bradesco	30	-0,05%	2,20%	0,451
Itausa*	30	0,49%	2,65%	0,472
Perdigão	30	-0,53%	1,94%	-0,073
JBS*	30	0,11%	3,81%	0,683
Marcopolo*	30	0,14%	2,52%	-0,321
Gerdau*	30	0,21%	3,30%	0,015
P. Açúcar*	30	0,07%	1,59%	-0,769
L. Americanas	30	0,63%	2,65%	-0,031

*Ativos na carteira

Fonte: dados da pesquisa

Neste último período ocorreram um número maior de ativos com assimetria negativa em relação aos anteriores, contudo, os graus foram pequenos, destaque para “P. açúcar” para assimetria negativa e a “JBS” para a assimetria positiva. A partir das informações da tabela 5 e seguindo os critérios citados na metodologia as carteiras para as análises foram as seguintes: 5 ativos – “P. açúcar”, “Marcopolo”, “Itausa”, “JBS” e “Gerdau”; para 4 ativos – “P. açúcar”, “Marcopolo”, “Itausa” e “JBS”; para 3 ativos – “P. açúcar”, “JBS” e “Gerdau”.

Tabela 6 – Comparação dos modelos

Quant. Ativos	Comparação	Testes	p
5	Assimétrico x Heurístico	-27,402	0,000
5	Endógeno x Heurístico	-27,406	0,000
4	Assimétrico x Heurístico	-27,402	0,000
4	Endógeno x Heurístico	-27,409	0,000
3	Assimétrico x Heurístico	-27,907	0,000
3	Endógeno x Heurístico	-15,013	0,000

Fonte: dados das simulações

Nas comparações resumidas na tabela 6 foi utilizado o teste para amostras pareadas de Wilcoxon em todos os tipos de portfólios; assim como nos demais períodos foram encontradas diferenças significativas entre o modelo heurístico e os modelos de matrizes assimétricas e endógenas. Outro ponto a destacar foi o valor de -15,013 no teste de Wilcoxon na carteira formada por 3 ativos, isto indica a possibilidade, ainda fraca, do aumento no grau de erro entre os modelos quando aumentam o número de ativos no portfólio.

5. Considerações finais

No presente artigo foram discutidos assuntos a respeito da seleção dos ativos com objetivos de maximizar retornos ou minimizar riscos; o modelo mais famoso foi demonstrado por Markowitz (1952), este deu origem as bases da moderna teoria do portfólio. Entretanto, diversas limitações são existentes no modelo, seja pela ausência de normalidade na

distribuição dos retornos dos ativos e a suposição de racionalidade dos investidores ser questionada.

Diante das limitações citadas, pesquisadores buscaram conceitos que pareciam esquecidos com a evolução da teoria, como destaque o critério *safety first* apresentado por Roy (1952); Markowitz (1959) também reconhece o modelo e propõe o estudo da semivariância. Desde o desenvolvimento dos primeiros estudos, outros modelos de análise foram criados; neste caso, modelos que consideram o *downside risk* e distribuições de retornos assimétricas como LPM (*Lower Partial Moment*) e CVaR (*Conditional Value at Risk*), sendo estes novos modelos as bases da teoria do portfólio pós-moderna (*Post-Modern Portfolio Theory*).

Neste artigo o foco é a discussão sobre a semivariância, uma das formas específicas dos modelos LPM; mais especificamente, sobre os problemas de otimização. No caso por média-variância, as carteiras podem ser analisadas de forma simplificada devido a matriz de covariâncias ser conhecida diretamente dos dados; contudo, no caso das matrizes de semi-covariâncias diversas formas de cálculo são apresentadas (ver ATHAYDE, 2001).

Os problemas nos cálculos da matriz de semi-covariância, segundo Estrada (2008), são devido a assimetria ($CSV R_{ij} \neq CSV R_{ji}$) e ser endógena (valores se modificam de acordo com os pesos alocados nos ativos). Deste modo, Estrada (2008) propõe uma heurística (aproximação) com objetivos de minimizar os problemas citados; contudo Cheremushkin (2009) critica fortemente as análises de Estrada.

Através da observação dos artigos destes dois últimos autores, percebe-se a falta de algumas demonstrações importantes para avaliar a eficiência do modelo; sendo assim, o objetivo deste artigo, isto é, demonstrar a possibilidade de diferenças significativas entre os modelos (apresentados nas equações 1, 2 e 3). As análises ocorreram em 3 períodos seguindo momentos diferenciados do índice Bovespa; as comparações foram realizadas em carteiras compostas por 5, 4 e 3 ativos, sendo simuladas 1000 composições em cada portfólio de análise.

A partir dos resultados, pode-se demonstrar uma superestimação da heurística em relação aos modelos de matriz de semi-covariância assimétrica e endógena através da observação das distribuições dos riscos dos portfólios; algo somente citado de forma breve nos estudos de Estrada (2008) e Cheremushkin (2009). Quanto aos testes de comparação, comprovou-se a diferença ser significativa entre a aproximação e os cálculos exatos, estes resultados reforçam as críticas de Cheremushkin (2009) e trazem algumas necessidades de complementação a heurística apresentada por Estrada (2008).

Como limitações deste estudo, pode-se levantar alguns comentários como: a medida que o número de ativos nas carteiras decrescem, as diferenças entre os modelos tendem a diminuir, contudo, o decaimento demonstra-se muito pequeno; sendo que não foram realizados os testes necessários para avaliar esta ocorrência. Outro ponto, não foram analisadas as características dos portfólios para dados anuais e mensais, esta avaliação se torna necessária para conhecer se o grau de erro entre a heurística e os cálculos exatos podem aumentar ou diminuir em relação a retornos diários, utilizados neste trabalho.

Para trabalhos futuros seria importante analisar, com os testes adequados, a tendência das diferenças entre os modelos diminuir medida que o número de ativos nas carteiras decresce. Também é importante complementar o estudo com análises sobre quais as características das carteiras otimizadas dado um retorno nos diferentes modelos; por último, o desafio de desenvolver um método para correção da superestimação da heurística demonstrada no artigo de Estrada (2008).

6. Referências

ANG, J. A note on the E, SL portfolio selection model, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 10, n. 05, p. 849-857, December, 1975.

ASSAF NETO, A. *Finanças corporativas e valor*. São Paulo: Atlas, 2003.

ATHAYDE, G. Building a mean-downside risk portfolio frontier. In: *Managing Downside Risk in Financial Markets*. Edited by F. Sortino and Satchell Eds. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.

BALLESTERO, E. Mean-semivariance efficient frontier: a downside risk model for portfolio selection. *Applied Mathematical Finance*. Vol. 12, n. 01, p. 1-15, March, 2005

BAWA, V.; LINDENBERG, B. Capital market equilibrium in a mean, lower partial moment framework. *Journal of Financial Economics*. Vol. 5, p. 189-200, 1977.

CASSAROTTO FILHO, N.; KOPITTKKE, B. H. *Análise de investimentos: matemática financeira, engenharia econômica, tomada de decisão, estratégia empresarial*. 8 ed. São Paulo: Atlas, 1998.

CASTRO JUNIOR, F. H. F.; SILVEIRA, H. P. Modelagem das distribuições das taxas de retorno dos índices Ibovespa e S&P 500. *Revista de Administração Mackenzie – RAM*. Vol. 10, n. 01, jan./fev., 2009.

CHEREMUSHKIN, S. V. *Why D-CAPM is a big mistake? The incorrectness of the cosemivariance statistics*. Working Paper Series. Fevereiro, 2009. Disponível em: <<http://ssrn.com/abstract=1336169>>. Acesso em: 02/03/2010.

CHOOBINEH, F. BRANTING, D. A single approximation for semivariance. *European Journal of Operational Research*. Vol. 27, pag. 364-370, North Holland, 1986.

COSTA, O. L. V.; ASSUNÇÃO, H. G. V. *Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros*. 1. ed. São Paulo: Manole, 2005.

ELTON, E.; GRUBER, M.; PADBERG, M. Simple criteria for optimal portfolio selection. *Journal of Finance*. Vol. 31, n. 05, p. 1341-1357, December, 1976.

ESTRADA, J. Downside risk in practice. *Journal of Applied Corporate Finance*. Vol. 18, number 1, Winter, 2006.

ESTRADA, J. Mean-semivariance behavior: downside risk and asset price. *International Review of Economics and Finance*. Vol. 16, p.p. 169-185, 2007.

ESTRADA, J. Mean-semivariance optimization: a heuristic approach. *Journal of Applied Finance*. Vol. 18, n.1, Spring-Summer, 2008.

ESTRADA, J. Systematic risk in emerging markets: the D-CAPM. *Emerging Markets Review*. Vol. 3, p.p. 365-379, 2002.

FORTUNATO, G. X.; MOTTA, L. F. J.; RUSSO, G. Custo de capital próprio em mercados emergentes: uma abordagem empírica no Brasil com o downside risk. *Revista de Administração Mackenzie*. Vol. 11, n. 1, São Paulo, jan./fev., 2010.

GROOTVELD, H.; HALLERBACH, W. Variance vs downside risk: is there really that much difference?. *European Journal of Operational Research*. Vol. 114, p.p. 304-319, 1999.

HOGAN, W. W.; WARREN, J. M. Computation of the efficient boundary in the E-S portfolio selection model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 7, p.p. 1881-1896, September, 1972.

_____; _____. Toward the development of an equilibrium capital-market model based on semivariance. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 09, n. 1, p. 1-11, January, 1974.

JARROW, R.; ZHAO, F. Downside loss aversion and portfolio management. *Management Science*. Vol. 52, n.04, April, 2006.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. An analysis of decision under risk. *Econometrica*. Vol. 47, n. 02, p. 263-291, March, 1979.

LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*. Vol. 47, p. 13-37, 1965.

LUCENA, P.; FIGUEIREDO, A. C. Prevendo retornos de ações através de movimentos passados: uma modificação no modelo de grinblatt e moskowitz. *REAd – Revista Eletronica de Administração*. Vol. 14, n. 2, Porto Alegre, mai./ago., 2008.

LUCENA, P.; MOTTA, L. F. J. Aplicação de um novo modelo de análise de risco na Bovespa: o D-CAPM. *REAd – Revista Eletronica de Administração*. Vol. 10, n. 5, Porto Alegre, set./out., 2004.

LUENBERGER, D. G. *Investment Science*. New York: Oxford University Press, 1998.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *Journal of Finance*. Vol. 7, n. 1, p. 77-91, March, 1952.

_____. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. New York: John Wiley & Sons, 1959.

_____; TODD, P.; XU, G.; YAMANE, Y. Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm. *Annals of Operations Research*. Vol. 45, n. 01, p. 307-317, December, 1993.

NAWROCKI, D. A comparison of risk measures when used in a simple portfolio selection heuristic. *Journal of Business Finance and Accounting*. Vol. 10, n. 02, p. 183-194, June, 1983.

_____; STAPLES, K. A customized LPM risk measure for portfolio analysis. *Applied Economics*, vol. 21, n. 02, p. 205-218, February, 1989.

_____. A brief history of downside risk measures. *Journal of Investing*. Vol. 8, p.p. 9-25, Fall, 1999.

_____; CUMOVA, D. *A Symmetric LPM Model for Mean-Semivariance Optimization*. Working paper. Villa Nova, 2007. Disponível em: <<http://www90.homepage.villanova.edu/michael.pagano/DN%20Cumova-Nawrocki%20Symmetric%20Semivariance%20Optimization%20V1.pdf>>. Acesso em: 05/04/2010.

ROM, B. M., FERGUSON, K.W. *Post-modern portfolio theory comes of age*. *Journal of Investing*, p. 11-17, Fall, 1994.

ROMAN, D.; MITRA, G. Portfolio selection models: a review and new directions. *Wilmott Journal*. Vol 1, Issue 02, p.p. 69-85, April, 2009.

ROY, A. D. Safety first and the holding of assets. *Econometrica*. Vol. 20, n.03, p. 431-449, 1952.

SHARPE, W. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*. Vol. 19, p. 425-442, 1964.

SIEGEL, S. *Estatística não-paramétrica para ciências do comportamento*. São Paulo: McGraw-Hill, 1976.

SING, T.; ONG, S. Asset allocation in a downside risk framework. *Journal of Real Estate Portfolio Management*. Vol. 6, n.3, p.p. 213-223, 2000.