

## **High Frequency Trading: Preço, Volume e Volatilidade em uma Nova Microestrutura de Mercado**

**ALCIDES CARLOS DE ARAUJO**

USP - Universidade de São Paulo  
alcides.carlos@yahoo.com.br

**ALESSANDRA DE AVILA MONTINI**

USP - Universidade de São Paulo  
amontini@usp.br

## ***High Frequency Trading: Preço, Volume e Volatilidade em uma Nova Microestrutura de Mercado***

### **INTRODUÇÃO**

As operações por alta frequência (*High Frequency Trading* - HFT) cresceu significativamente nos E.U.A. Conforme Aldridge (2010) o HFT representava em torno de 60% do volume transacionado nas bolsas de valores. Os retornos também não decepcionaram os investidores, alguns fundos HFT, como por exemplo, O Medalion Fund, apresentou rendimentos anuais médios de 35% (entre 2000 e 2010) e os fundos da Renaissance que superaram o S&P500 em meio à crise de 2008 em torno de 4% a 6%.

Em pesquisas a respeito do tema, os pesquisadores apresentavam variados pontos positivos a respeito do HFT. Por exemplo, em Aldridge (2010) são citados quatro pontos benéficos aos mercados quanto a utilização das operações em alta frequência: aumento da eficiência, aumento da liquidez, maior desenvolvimento tecnológico e estabilização dos sistemas de mercado.

Por meio destas evidências, o mercado americano demonstrava sentimento positivo em relação ao HFT. Contudo, o evento ocorrido no dia 6 de Maio de 2010, conhecido como *Flash Crash Day*, levantou um debate a respeito da estrutura e estabilidade do mercado financeiro dos E.U.A. com uso destas operações. Conforme Kirilenko et al (2011), neste dia específico, em torno de 30 minutos, os índices de ações, futuros, opções e fundos do mercado financeiro americano apresentaram uma súbita queda de preços superior a 5% seguido por outra súbita recuperação.

Diante disto, os opositoristas apresentaram argumentos como os computadores não possuem real conhecimento sobre o que são as empresas nem o que elas fazem e os investidores de HFT poderem manipular o mercado, dado que os algoritmos reagem rapidamente a novas informações e transacionam altíssimo volume financeiro. Este comportamento poderia gerar o acionamento de forma descontrolada de ordens *start* (entrada) ou *stop* (saída) alterando o equilíbrio do mercado e aumentando a volatilidade.

Quanto aos retornos, conforme apresenta Seabra (2014), os fundos nos E.U.A. que utilizam estratégias baseadas em algoritmos de alta frequência estão exibindo desempenho abaixo do esperado nos últimos. Como resultado, os cotistas iniciam a realizar saques e fundos perdem participação no mercado.

Depois de um rápido crescimento, as operações por HFT passam a uma súbita desconfiança pelos investidores, analistas e gestores de carteiras, sendo indagada até sobre quantos realmente entendem sobre o funcionamento dos modelos de alta frequência, conforme cita Kupfer (2011). O próprio órgão regulador do mercado de capitais americano, a SEC (*Securities and Exchange Commission*), apresentou um documento contendo em torno de 215 perguntas a respeito do funcionamento e regulação da estrutura do mercado financeiro norte americano na presença de operações de alta frequência (SEC, 2010).

Em busca de respostas para o debate levantado, a principal associação mundial para regulação de valores mobiliários *International Organization of Securities Commissions* (IOSCO) evidenciou como principais temas de atuação em 2013 a regulação dos negócios de alta frequência, o impacto da tecnologia e a análise destas infraestruturas de mercado (IOSCO, 2012).

Em relação ao Brasil, Araújo e Montini (2013) apresentaram questões relevantes sobre o tema: "faria sentido este debate no Brasil com mercado ainda em

crescimento?", "as estratégias de HFT apresentariam rentabilidades comparáveis com os retornos vistos nos EUA quando iniciaram estas operações?".

Quanto ao crescimento, existe um esforço pela CVM (Comissão de Valores Mobiliários) para fomentar estas operações, porém o ritmo de desenvolvimento não é tão rápido como aconteceu nos E.U.A. (PORTUGAL, 2010). Parte deste lento desenvolvimento, na bolsa brasileira, é explicado devido que somente em 2005 as operações se tornaram completamente automatizadas junto com o encerramento do pregão viva-voz.

Quanto aos retornos, Seabra (2014) relata pesquisa realizada pela FGV demonstrando que a utilização de algoritmos complexos não adere ao fundo uma melhor performance em comparação com os demais. Do ponto de vista estatístico, as diferenças entre os retornos dos fundos não foram significativas. Do ponto de vista financeiro, as carteiras administradas sem o uso de algoritmos apresentou retorno em torno de 5% acima das carteiras geridas com base em algoritmos.

Este resultado era previsto por especialistas, conforme Seabra (2014), em entrevista com especialista, apresenta que os modelos funcionam mantendo certas variáveis analisadas estáveis, porém o mercado brasileiro é "pequeno, pouco profundo e muito volátil". Diante deste fato, seria necessário um número maior de participantes comprando e vendendo em alta velocidade para que o volume transacionado pudesse trazer algum retorno significativo à estratégia utilizada.

Conforme apresentaram os especialistas, o retorno das estratégias por HFT abaixo do esperado estão relacionadas ao baixo volume de transações na bolsa brasileira. De acordo com Rocha (2013), existe uma estagnação desde 2008 no volume negociado no mercado financeiro do Brasil.

Mesmo diante do evidente problema relacionado ao volume negociado, os empresários brasileiros apresentam um sentimento positivo em relação ao HFT. Conforme demonstrou Portugal (2010) os executivos desejam aumentar o número de operações por alta frequência até final de 2013, dado a competitiva indústria de investimentos em oferecer melhor infraestrutura tecnológica.

Em Mazzoni (2012) os executivos entrevistados também demonstraram otimismo as operações de alta frequência no Brasil; afirmações do tipo: "*The Brazilian market is in excellent position for growth and our goal is to focus on Brazil*", puderam ser constatadas. Conforme o autor, o empreendedores da área percebem no Brasil um estágio semelhante ao dos E.U.A. antes do rápido crescimento das operações HFT.

Conforme foi discutida a relação entre retornos, volume e número de negociações, o HFT está relacionado com grandes aumentos nos volumes transacionados. Diante disto, justifica-se uma pesquisa que possa observar o relacionamento entre volatilidade do mercado de ações e o volume das transações realizadas, principalmente, em um contexto de mercado com presença e crescimento do HFT como o Brasil.

No artigo de Araújo e Montini (2012) o ambiente de microestrutura do HFT foi estudado, buscando observar as relações entre retornos, volume e negociações em momentos antes e pós-iniciação das estratégias HFT a luz das hipóteses clássicas propostas por Karpoff (1987). O principal foco de análise foi comparar os resultados encontrados por Medeiros e Doornik (2008) e adicionar nos modelos o número de negociações realizadas.

Os autores encontraram evidências para existir associação entre variação absoluta de preços e volume, além da relação ser assimétrica (retornos positivos necessitam de maior volume transacionado) no período entre os anos de 2000 a 2005.

No período com a presença do HFT (anos entre 2009 a 2013), os coeficientes não foram significativos, período em que o volume transacionado ficou estagnado.

Como limitação, o artigo foi restringido a observação das análises de variação absoluta e variação pura dos preços das ações com volume e adicionalmente o número de negociações. O artigo contribuiu ao respeito de que existe uma demanda significativa em busca de informações sobre o tema, entretanto, a relação destas variáveis com a volatilidade não foi verificada.

Conforme Karpoff (1987) analisar a volatilidade é relevante porque a relação entre preço e volume tende a ser mais significativa em mercados em que o fluxo de informação é mais volátil. Diante disto, a força da relação tende a aumentar conforme o número de negociações. Karpoff (1987) também ressalta que o volume é uma variável utilizada para observar o fluxo de informações; deste modo, dado um volume alto em algum período, verifica-se maior variância nos preços.

Mediante tais justificativas, o objetivo do presente artigo é analisar a relação entre a variância das mudanças de preços e volume na bolsa de valores brasileira em momentos antes e pós-iniciação das estratégias HFT. Diante disto, o artigo complementa os fatores limitantes no artigo de Araújo e Montini (2013) e atualiza as estimações com dados mais recentes. Os próximos tópicos são organizados por revisão da literatura, metodologia, discussões dos resultados e considerações finais.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Por meio do objetivo de comparar o volume transacionado e a volatilidade dos preços em ambientes sem e com HFT, torna-se importante definir a expressão *High Frequency Trading* (HFT).

Conforme Aldridge (2010) na conceituação do termo é importante diferenciá-lo de outros conceitos, dado que existe uma confusão entre os termos: *Electronic Trading*, *Algorithmic Trading* e HFT. O *Trading* Eletrônico se refere à capacidade de transmissão de ordens eletronicamente, ou seja, sem uso de telefone, carta ou viva-voz. O *Algorithmic Trading* utiliza complexos algoritmos para organizar o processo de execução de ordens.

Desta forma, o *High Frequency Trading* se refere à rápida realocação de capital, em que as transações podem ocorrer em milésimos de segundos; para que as operações sejam flexíveis, muitos sistemas HFT são construídos utilizando algoritmos complexos para otimizar o envio de ordens, analisar dados obtidos e tomar as melhores decisões de compra e venda.

Portnoy (2011) complementa ao afirmar que as estratégias de HFT utilizam máquinas robustas para aplicarem algoritmos complexos criados para buscar diferentes oportunidades nas bolsas de valores. Tais algoritmos buscam antecipar qual direção algum ativo financeiro é provável seguir numa dada fração de segundo em meio às condições de mercado e análises estatísticas do desempenho passado do ativo da empresa.

Quanto a análise entre retornos, volatilidades dos retornos e volumes nos mercados financeiros, existe uma vasta literatura sobre o tema. Alguns trabalhos relevantes foram originados na década de 50, o tema recebeu ênfase significativa na década de 70, na formação dos mercados de opções. Nestes últimos anos, o tema voltou a ser bastante discutido com o crescimento das operações de alta frequência nos E.U.A.

Conforme apresenta Portnoy (2011), os negociadores que utilizam algoritmos de alta frequência podem alterar o equilíbrio de oferta e demanda. Uma vez que estes

modelos podem enviar altas quantidades de ordens com volumes significativos, por meio disto, outros investidores podem seguir a tendência e enviarem ainda mais ordens de compra ou venda alterando os preços significativamente, porém de forma completamente artificial.

Nos próximos tópicos são apresentados resultados de pesquisas que buscaram analisar a relação entre variações de preços e volume negociado ( $\Delta p$  e  $V$ ) e a relação entre volume transacionado e volatilidade no mercado.

## 2.1 Análise da variação

Diversos pesquisadores buscaram estudar a relação entre variações de preços e volume negociado ( $\Delta p$  e  $V$ ), principalmente para responder se a relação seria significativa, no Quadro 1 são resumidos alguns dos principais trabalhos.

Nas relações apresentadas na expressão 1, Karpoff (1987) exhibe a proposição de análise para  $\Delta p$  e  $V$ ,

$$\begin{cases} V^- = h(\Delta p | \Delta p \leq 0) \\ V^+ = h(\Delta p | \Delta p > 0) \\ E(V^+ | \Delta p) > E(V^- | \Delta p) \end{cases}, \quad (1)$$

em que,  $V^-$  é a relação preço-volume negativa dada uma variação negativa nos preços;  $V^+$  é a relação preço-volume positiva dada uma variação positiva nos preços. Mediante a expressão proposta por Karpoff (1987) existe uma relação assimétrica entre preço e volume, sendo a correlação entre preço e volume maior quando existem variações positivas nos preços. Pela observação do Quadro 1, onze dos artigos analisados demonstraram evidências para a existência de relação significativa.

**Quadro 1 – Análises variação  $\Delta p$  e  $V$**

Autores	Amostra	Período	Intervalo	Relação $\Delta p$ e $V$
Granger and Morgenstern (1963)	Mercado de ações agregados, 2 ações ordinárias	1939-61	semanalmente	Não sig.
Godfrey, Granger and Morgenstern (1964)	Mercado de ações agregados, 3 ações ordinárias	1959-62, 1951-53, 63	semanalmente, diariamente, por negócios	Não sig.
Ying (1966)	Mercado de ações agregados	1957-62	diariamente	Sig.
Epps (1975)	20 NYSE bonds	Jan., 1971	por negócios	Sig.
James and Edmister (1983)	500 ações ordinárias	1975, 77-79	diariamente	Não sig.
Smirlock and Starks (1985)	131 ações ordinárias	1981	por negócios	Sig.
Wood, McInish and Ord (1985)	946 ações ordinárias, 1138 ações ordinárias	1971-72, 1982	minutos	Não sig.
Harris (1986)	479 ações ordinárias	1976-77	diariamente	Sig.
Medeiros e Doornik (2008)	Índice Bovespa	2000-2005	diariamente	Sig.
Araújo e Montini (2013)	Índice Bovespa	2009-2013	diariamente	Não sig.

**Fonte:** Elaborado pelos autores, baseado em Karpoff (1987)

Com objetivo em explicar porque a relação entre  $\Delta p$  e  $V$  foi significativa, Epps (1975) baseia seu argumento no comportamento dos investidores dado as condições de mercado; enquanto que Jennings, Starks e Fellingham (1981) baseiam-se a explicação por meio do comportamento de investidores desinformados.

Diante disto, conforme apresenta Epps (1975), em momentos em que maiores volumes financeiros são transacionados, variações positivas de preço tendem a ocorrer em maior frequência. Para os autores Jennings, Starks e Fellingham (1981) investidores desinformados tendem a negociar menor volume financeiro quando recebem notícias pessimistas. Contudo, quando recebem notícias otimistas, transacionam maior volume financeiro.

O artigo de Medeiros e Doornik (2008) analisou a relação entre variação de preços e volume transacionado no Brasil no período entre os anos de 2000 a 2005; os autores testaram um modelo proposto por Lee e Rui (2002), exibido no sistema expresso em 2,

$$\begin{cases} R_t = \alpha_0 + \alpha_1 V_t + \alpha_2 V_{t-1} + \alpha_3 R_{t-1} + u_t \\ V_t = \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_2 V_{t-1} + \beta_3 V_{t-2} + \varepsilon_t \end{cases} \quad (2)$$

Os autores demonstraram relações significantes nos coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ . Diante disto, foi possível evidenciar, no período estudado, a existência de relação contemporânea entre variação dos preços e volume, além de outra relação defasada para os retornos (variações dos preços). Além disto, os autores exibem a existência de dependência temporal entre as defasagens de 1 e 2 períodos para o volume. Deste modo, Medeiros e Doornik (2008) encontraram para o Brasil resultados semelhantes ao da maioria dos pesquisadores listados no Quadro 1.

O artigo de Araújo e Montini (2013) incluiu a variável número de negociações ( $N_t$ ) na expressão 2 e buscaram comparar as relações nos períodos antes e depois do início das operações por HFT. Pelos resultados, observou-se uma relação negativa e significativa com o volume no período antes do HFT, depois uma relação positiva e não significativa pós HFT. Os autores atribuíram o resultado como um possível sinal fraco para maior utilização em andamento do HFT no Brasil, ainda existindo a necessidade de maior número de agentes transacionando no mercado brasileiro.

## 2.2 Análise da volatilidade

O fluxo de informação nos mercados financeiros é de principal relevância na explicação da volatilidade. Conforme apresenta Karpoff (1987) quanto mais volátil ocorrer este fluxo de informações mais significativa tende ser a relação entre retornos dos preços e volume. Diante disto, a atividade de negociação pode ser uma fonte de explicação para a persistência na volatilidade dos retornos.

Conforme citam Medeiros e Doornik (2008), a persistência no modelo de volatilidade é uma medida de permanência de impacto de um choque sobre a volatilidade, esta análise foi motivada pelos artigos que trataram sobre a hipótese de distribuição mista (*Mixture of Distribution Hypothesis* - MDH).

Medeiros e Doornik (2008) apresentam que os artigos de Clark (1973) e Epps e Epps (1976) foram os primeiros a formalizarem a teoria sobre a distribuição dos retornos nos mercados especulativos por meio da MDH. Conforme apresentam Clark (1973) e Epps e Epps (1976), os retornos são gerados por distribuições mistas de probabilidade em que o número de chegada de informações são representadas por uma série estocástica mista.

Deste modo, a série de retornos é um processo estocástico condicional ao fluxo de informações, as inovações neste fluxo estão relacionados com volatilidade dos retornos. Dado que o fluxo de informações é uma variável não observável, o volume transacionado é utilizado como variável *proxy*, mediante que é assumido que as variações no volume são causadas por chegada de novas informações.

Diante disto, a hipótese de distribuição mista é um modelo que explica o processo de formação dos preços nos mercados financeiros, este modelo implica dependência estocástica entre volume transacionado e volatilidade. Diversos autores estudaram o modelo, no Quadro 2 são resumidos os principais trabalhos.

O processo de desenvolvimento desta teoria iniciou no artigo de Clark (1973); conforme o autor, por meio de um processo estocástico  $T(t)$ , um novo processo subordinado, denominado  $X(T(t))$ , pode ser modelado. Deste modo,  $X(T(t))$  pode ser visualizado como o processo de evolução dos preços e  $T(t)$  é uma medida de tempo que denota a velocidade da evolução do processo; sendo que o volume transacionado seria a variável para representar esta velocidade da evolução.

Mediante o modelo apresentado, Clark (1973) apresenta que a volatilidade dos preços nos mercados especulativos é explicada por uma simples função do volume. Por meio de uma série de preços do mercado futuro de algodão, o autor estuda a relação e encontra uma associação positiva e significativa.

O artigo de Epps e Epps (1976) apresenta evidências empíricas adicionais ao artigo de Clark (1973), em que a variância condicional foi demonstrada como função do volume transacionado.

O modelo apresentado em Epps e Epps (1976) é baseado nas expectativas dos investidores, segundo os autores se um dado momento " $t$ " a expectativa do *trader* é diferente do momento " $t - 1$ ", o preço no instante " $t - 1$ " possuía excesso de oferta ou demanda. Os autores citam que este desequilíbrio pode ter ocorrido pela chegada de novas informações ou pela discrepância entre o preço de mercado e o chamado preço "nulo", um preço adotado quando o mercado não possui excesso de oferta/demanda.

Dado que novas informações afetam os preços "nulos" dos diferentes *traders*, o comportamento destes levaram o preço em " $t - 1$ " ao novo preço " $t$ ". Deste modo, o existente excesso de oferta/demanda foi equilibrado, fazendo com que os preços de mercado e "nulos" se tornassem iguais.

Nestas mercados, em que novas informações alteram o comportamento dos investidores, acontecem diversos momentos de comportamentos discrepantes. Os investidores que possuem preços "nulos" acima do preço de equilíbrio no momento " $t$ " irão comprar as ações dos investidores que possuem preço "nulo" abaixo do preço de equilíbrio no momento " $t$ ".

Diante disto, Epps e Epps (1976) define MDH utilizando o volume transacionado como medida para o comportamento discrepante entre os *traders* quando eles revisam seus preços devido a chegada de novas informações no mercado. Quanto maior o desacordo, maior o volume transacionado; deste modo, os autores sugerem uma relação positiva entre volatilidade e volume transacionado. No artigo destes autores, os dados confirmam a relação esperada.

Conforme apresentam Tauchen e Pitts (1983), os artigos de Clark (1973) e Epps e Epps (1976) são complementares, dado que ambos demonstram pontos relevantes para entendimento dos mercados especulativos. Entretanto, os autores demonstram que estes modelos funcionam para mercados maduros, para mercados em crescimento, os modelos apresentam inconsistências.

Diante disto, Tauchen e Pitts (1983) analisam o MDH para o caso de mercado em crescimento utilizando como exemplo o mercado futuro de títulos de dívida dos

E.U.A. (T-Bill). Como resultados, os autores demonstraram que o volume médio transacionado cresce linearmente com o número de agentes no mercado. No caso da volatilidade, na presença de mais agentes a variância dos preços tenderia a decrescer. Porém, devido a presença de mais agentes, o grau de desacordo entre eles pode aumentar, fazendo com que a variância dos preços possua relação positiva com o volume transacionado.

O artigo de Lamoureux e Lastrapes (1990) explora o tema levando em consideração que os incrementos da variância dos preços é heterocedástico; sendo que a relação desta série com a taxa de chegada de informações diárias é positiva. Para entender e testar esta relação, os autores estimam um modelo Autoregressivo com Heterocedasticidade Condicional Generalizado de primeira ordem - GARCH(1,1) - utilizando o volume para representar o fluxo de informações.

Os autores testaram o comportamento dos efeitos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) sem a presença e com a presença da variável volume transacionado no modelo. O artigo de Lamoureux e Lastrapes (1990) encontrou resultados relevantes, demonstrando que os efeitos GARCH tendem a desaparecer na presença da variável volume no modelo. Desta forma, os autores motivam a utilização dos modelos GARCH nos estudos sobre comportamento dos preços de ativos financeiros.

O artigo de Andersen (1996) apresenta contribuições significativas devido que adiciona novos elementos a hipótese de distribuição mista dos retornos nos mercados especulativos. O autor desenvolve um modelo que analisa a relação retorno-volume integrando a perspectiva da volatilidade estocástica, desta forma, estuda uma versão modificada do modelo MDH (*Modified MDH*).

Conforme Andersen (1996), as principais diferenças em relação ao modelo original são a presença de uma variável que considera o componente de liquidez nas negociações e a suposição de que o processo de chegada de informações segue uma distribuição de Poisson ao invés de uma distribuição Normal, como foi proposta em Epps e Epps (1976).

Diante disto, o fluxo de informações é assumido para representar um processo de volatilidade estocástica que direciona retornos e volume. Segundo os resultados de Andersen (1996), a versão modificada do modelo MDH apresentou uma especificação que se ajustou aos dados, além de uma melhor performance de análise em relação ao modelo original.

O artigo de Lee e Rui (2002) analisou a relação entre retornos, volume e volatilidade buscando superar uma limitação observada nos demais estudos, a análise de somente um mercado. No trabalho de Lee e Rui (2002) os autores buscaram comparar a relação entre mercados de países diferentes (Nova Iorque, Tóquio e Londres); os autores demonstraram que a relação entre volatilidade e volume transacionado permaneceu significativa mesmo analisada em mercados diferentes.

No artigo de Medeiros e Doornik (2008), os autores analisam a relação entre volatilidade e volume transacionado no mercado brasileiro. Por meio do modelo MDH proposto por Clark (1973) e Epps e Epps (1976) e revisado nos pelos autores expostos no Quadro 2, a pesquisa ajustou o modelo apresentado na expressão 3,

$$\begin{cases} R_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1} + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2 + \beta_3 V_t \end{cases} \quad (3)$$

Em que, o processo estocástico dos retornos ( $R_t$ ) foi expresso por um termo autoregressivo e a equação da variância condicional teve especificação de um



GARCH(1,1) com um termo de volume transacionado ( $V_t$ ). O termo de erro possui comportamento  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$  e soma dos parâmetros  $\beta_1 + \beta_2$  é a medida de persistência na variância do termo  $\varepsilon_t$ .

Ressalta-se que a persistência é uma medida de permanência de impacto de um choque sobre a volatilidade do preço de um ativo; caso as condições de estabilidade do modelo forem aceitas, os valores da persistência variam entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1, maior o tempo que um choque na série levará para dissipar-se.

Quanto a relação entre volatilidade e volume, a pesquisa de Medeiros e Doornik (2008) apresentou resultado similar ao dos demais autores quando o sinal da relação foi observado, porém a significância foi diferente. Desta forma, volatilidade e volume possuíram relação positiva, porém não significativa.

No caso da interpretação da persistência, os autores encontraram resultados similares aos de Lamoureux e Lastrapes (1990), em que os termos GARCH ( $\beta_1$  e  $\beta_2$ ) tenderam a diminuir na presença da variável volume. Entretanto, diferente de Lamoureux e Lastrapes (1990), em que os coeficientes não foram significativos; nas estimações de Medeiros e Doornik (2008) os efeitos da persistência se mantiveram significativos. Diante destes resultados, os autores concluem que para o Brasil o modelo MDH apresentou fraco ajuste no período estudado.

**Quadro 2 – Análises relação Volatilidade e Volume**

<b>Autores</b>	<b>Amostra</b>	<b>Período</b>	<b>Intervalo</b>	<b>Relação Volat. x Volume</b>
Clark (1973)	Mercado Futuro de Algodão	1947-1955	diário	Sig.
Epps e Epps (1976)	Ações da bolsa de Nova Iorque	1971	diário	Sig.
Tauchen e Pitts (1983)	Mercado futuro títulos de dívida E.U.A. (T-Bill)	1976-1979	diário	Sig.
Lamoureux e Lastrapes (1990)	Ações da bolsa de Nova Iorque	1980-1983	diário	Sig.
Andersen (1996)	Ações da bolsa de Nova Iorque	1973-1991	diário	Sig.
Lee e Rui (2002)	Índices das bolsas de Nova Iorque, Tóquio e Londres	1973 - 1999	diário	Sig.
Medeiros e Doornik (2008)	Índice Bovespa	2000 - 2005	diário	Não sig.

**Fonte:** Elaborado pelos autores

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Dados e variáveis

Este trabalho possui o objetivo de analisar a relação entre a variância das mudanças de preços e volume na bolsa de valores brasileira em momentos antes e pós-inicição das estratégias HFT.

A pesquisa no Brasil de Medeiros e Doornik (2008) compreendeu um período entre 2000 a 2005; no artigo de Araújo e Montini (2013) houve a comparação entre dois períodos, isto é, o período entre os anos de 2000 a 2005, interpretado como os momentos antes HFT e 2009 a 2013 para os momentos de iniciação e pós HFT. Na presente pesquisa, as estimações para o período antes HFT corresponde ao período utilizado por Medeiros e Doornik (2008) e pós HFT entre os anos 2009 a 2014.

Isto foi importante para comparar os resultados no mesmo período, avaliar a existência de possíveis mudanças e atualizar o período observado em Araújo e Montini (2013) com os valores do ano de 2014. O período entre 2006 e 2008 não foi incorporado

as análises por ter sido o período da crise financeira, portanto, poderia causar algum viés nas estimações dos modelos.

Assim como foi analisado em Araújo e Montini (2013), os efeitos do número de negociações foram incorporados no modelo. A principal justificativa para considerar esta variável está relacionada ao HFT se referir a rápida realocação de capital; deste modo, muitas negociações ocorrem em milésimos de segundos existindo um aumento significativo do número de negociações na bolsa.

Quanto a observação da análise volume e negociações, espera-se encontrar resultados similares com o artigo de Araújo e Montini (2013), isto é, relação negativa e significativa com o volume no período antes do HFT. No período pós HFT, uma relação positiva e não significativa.

O sistema estimado para verificar estas relações é apresentado na expressão 4, este modelo apresenta algumas modificações em relação as sistemas modelados em Medeiros e Doornik (2008) e Araújo e Montini (2013). Conforme citaram Araújo e Montini (2013), os modelos ajustados necessitariam de uma revisão dado que alguns resultados demonstraram relação não esperadas, como por exemplo o sinal contrário na relação volume e número de negociações.

Quanto a análise entre volatilidade e volume negociado, o mesmo sistema de equações utilizado em Medeiros e Doornik (2008) foi estimado (expressão 5); no artigo destes autores a relação demonstrou ser não significativa. Contudo, conforme apresentam autores como Tauchen e Pitts (1983) e Lamoureux e Lastrapes (1990), esta relação deveria ser significativa.

Os dados de Retornos, Volume e Número de Negociações foram obtidos na plataforma de dados financeiros ECONOMATICA. O procedimento metodológico adotado em Medeiros e Doornik (2008) também foi realizado, os valores das séries foram deflacionados pelo IGP-DI e transformados em índice (base 100 para 03.01.2000). A análise de dados foi viabilizada pelo software EViews 7.

$$\begin{cases} R_t = \alpha_0 + \alpha_1 V_t + \alpha_3 R_{t-1} + u_t, \\ V_t = \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_4 N_t + \varepsilon_t, \\ N_t = \gamma_0 + \gamma_1 N_{t-1} + \eta_t. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} R_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2 + \beta_3 V_t. \end{cases} \quad (5)$$

A variável  $N_t$  é representada como o número de negociações; espera-se um aumento nesta variável no período de presença do HFT. O modelo expresso em 4 foi revisado em relação ao modelo proposto em Araújo e Montini (2013), deste modo, os parâmetros  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  e  $\gamma_2$  foram restringidos, tomando valores iguais a zero.

Séries econômicas possuem comportamento não estacionário, dado que possuem tendência estocástica e pelo menos uma raiz unitária, este comportamento ocorre devido que os processos geradores são próximos a passeios aleatórios (*random walk*). O artigo de Phillips (1986) demonstra que uma análise de regressão com séries deste tipo apresentam o problema da regressão espúria, não servindo para estimações financeiras e econômicas.

Para verificar a estacionariedade das séries forma utilizados os testes de raiz unitária. No presente artigo, dois deles são apresentados: Teste de Dickey e Pantulla (DP) e Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF).

As estimações dos sistemas expressos em 4 e 5 ocorreram pela utilização do método da máxima verossimilhança com informação completa (*Full Information*

*Maximum Likelihood*) e GARCH(1,1) adotando para otimização o método de Marquadt. Este método foi utilizado para obter resultados que pudessem ser comparados com os artigos de Medeiros e Doornik (2008) e Araújo e Montini (2013). Os parâmetros obtidos são consistentes, dado que o princípio da verossimilhança pode ser aplicado nestas estimações, conforme apresentou Lindgren (1976).

## 4 ANÁLISE DOS DADOS

Nesta etapa são discutidas as análises delineadas durante a metodologia, isto é, a divisão dos períodos antes e depois da eminência do HFT, realização dos testes de raiz unitária e estimação dos modelos propostos.

### 4.1 Testes de raiz unitária

Para verificar a estacionariedade das séries, foram utilizados 2 testes: o teste de Dickey e Pantulla, utilizado para avaliar a existência de 2 raízes unitárias contra somente 1 raiz unitária e o teste ADF, utilizado para verificar a existência de 1 raiz unitária contra 0 raiz unitária. Os testes para verificar a estacionariedade das séries foram resumidos nas Tabelas 1 e 2.

Como resultados, no teste de Dickey-Pantulla foi rejeitada a hipótese nula de existência de 2 raízes unitárias. Nos testes ADF, foram identificadas evidências para rejeitar a hipótese de existência de 1 raiz unitária. Deste modo, não houve necessidade de alguma transformação nos dados para obter a estacionariedade.

**Tabela 1 - testes raiz unitária (03.01.2000 - 29.12.2005)**

Variáveis	Teste DP	<i>t</i>	Resultado	Teste ADF	<i>t</i>	Resultado
$N_t$	sem tend. e const.	-12,362	não existem 2 ru	com const.	-18,188	não existe 1 ru
$V_t$	sem tend. e const.	-12,883	não existem 2 ru	com const.	-14,191	não existe 1 ru
$R_t$	sem tend. e const.	-16,640	não existem 2 ru	com const.	-18,712	não existe 1 ru

**Tabela 2 - testes raiz unitária (02.01.2009 - 07.07.2014)**

Variáveis	Teste DP	<i>t</i>	Resultado	Teste ADF	<i>t</i>	Resultado
$N_t$	sem tend. e const.	-15,678	não existem 2 ru	com const.	-7,400	não existe 1 ru
$V_t$	sem tend. e const.	-14,256	não existem 2 ru	com const.	-9,664	não existe 1 ru
$R_t$	sem tend. e const.	-16,333	não existem 2 ru	com const.	-16,698	não existe 1 ru

### 4.2 Estimação dos modelos

Após a constatação de que as séries são estacionárias, buscou-se estimar os modelos, na Tabela 3 são apresentadas as estimações. Na primeira coluna são apresentados os parâmetros relacionadas as variáveis estudadas, nas demais colunas são comparados os resultados das pesquisas realizadas por Medeiros e Doornik (2008), Araújo e Montini (2013) e do presente artigo.

A análise da relação entre retornos, volume e negociações foi possibilitada pela observação do sistema expresso em 4. Para o período antes do HFT são apresentadas duas estimações, o modelo estimado em Medeiros e Doornik (2008) e as estimações do presente artigo.

Ao comparar as duas estimativas, percebe-se que as relações contemporâneas retorno e volume apresentaram mesmo sinal, porém significâncias diferentes. Ou seja, quando a variável quantidade de negociações foi imposta, observa-se uma relação contemporânea positiva entre variação dos preços e volume transacionado, porém não

significativa. No período pós HFT, a relação entre as variáveis se inverteu, porém continuando não significativa, isto ocorreu pelo fato deste período o volume na bolsa ter se mantido estagnado e os retornos terem diminuído, conforme apresenta Rocha (2013).

Deste modo, o presente artigo demonstrou não existir uma relação significativa entre variação dos preços e volume negociado ( $\Delta p$  e  $V$ ) nos períodos estudados. Diante disto, o artigo se enquadra com os resultados apresentados em Granger and Morgenstern (1963), Godfrey, Granger and Morgenstern (1964), James and Edmister (1983), Wood, McInish and Ord (1985) e Araújo e Montini (2013).

Quanto a análise entre número de negociações e volume, os resultados do presente artigo apresentou resultados diferenciados em relação ao artigo de Araújo e Montini (2013), dado que o modelo foi revisado, as relações entre as variáveis se tornaram mais coerentes com a teoria.

O coeficiente  $\gamma_0$  comparado em ambos os períodos demonstra o crescimento do número de negociações ( $N_t$ ) com o passar dos anos, principalmente na presença das transações de alta frequência. Tanto no período antes HFT quanto no pós HFT a relação foi positiva e significativa, existindo um aumento no coeficiente  $\beta_4$  do período pós HFT. Isto demonstra que o número de negociações influencia o volume transacionado, contudo, com o crescimento das operações HFT esta influência apresentou mais força.

**Tabela 3 - Estimções Retorno x Volume (expressão 4)**

Par.	Medeiros e Doornik (2008)	Estudo (2000 - 2005)	Araujo e Montini (2013)	Estudo (2009 - 2014)
$\alpha_0$	-0,031***	-0,006	-0,0011	0,004
$\alpha_1$	0,001***	0,0001	0,0001	-0,00004
$\alpha_3$	-0,453**	-0,467***	-0,516***	-0,511***
$\beta_0$	155,502***	0,944	154,506***	-11,909
$\beta_1$	144,275	4,292	94,200	-3,515
$\beta_2$	-0,292***	-	-0,332***	-
$\beta_3$	-0,172***	-	-0,022	-
$\beta_4$	-	1,010***	-0,124	1,136***
$\gamma_0$	-	130,213***	134,519***	136,047***
$\gamma_1$	-	-0,250***	-0,310***	-0,324***
$\gamma_2$	-	-	92,204	-

\*\*Significante a 5%. \*\*\*Significante a 1%.

Na Tabela 4 são apresentadas as estimções que analisaram a relação entre volatilidade e volume, exibidas na expressão 5. Na primeira coluna são visualizados os parâmetros relacionados as variáveis, nas colunas 2 e 3 podem ser vistos os resultados do artigo de Medeiros e Doornik (2008) com os sistemas sem e com a variável volume respectivamente. Nas colunas 4 e 5 as estimções do período antes HFT sem e com a variável volume e nas colunas 6 e 7 os resultados para o período pós HFT sem e com a variável volume.

Conforme foi comentado, o artigo de Medeiros e Doornik (2008), contrariando demais autores, demonstrou não existir relação significativa entre volatilidade e volume. No presente artigo, demonstra-se que a relação entre volatilidade e volume é positiva e significativa no mercado brasileiro e os resultados estão de acordo com os demais pesquisadores da área.

Verificou-se que, conforme apresentou Karpoff (1987), a força da relação tendeu a aumentar a medida que o número de negociações aumentou. Pela comparação dos valores  $\beta_3 = 6,10 \cdot 10^{-7}$  e  $\beta_3 = 8,66 \cdot 10^{-7}$  nos períodos antes HFT e  $\beta_3 = 16,00 \cdot 10^{-7}$  pós HFT pode-se comprovar esta citação. Vale ressaltar que na Tabela 3 foi constatado o aumento do número de negociações no período pós HFT.

Os resultados também foram compatíveis com o artigo de Lamoureux e Lastrapes (1990). Deste modo, os efeitos GARCH, medidos pelos coeficientes  $\beta_1$  e  $\beta_2$  tiveram seus valores reduzidos quando a variável volume esteve presente na estimação. Por meio deste resultado, também observa-se que a persistência ( $\beta_1 + \beta_2$ ) tendeu a diminuir na presença da variável volume, conforme também foi encontrado em Lamoureux e Lastrapes (1990) e Medeiros e Doornik (2008).

Dado que os algoritmos de alta frequência conseguem realizar operações em altíssima velocidade e com volumes significativos, espera-se que algum choque na série financeira seja dissipado em menos tempo. O valor da persistência no período pós HFT foi levemente menor que em relação ao período antes HFT (antes = 0,939 > pós = 0,932), porém ainda não é possível afirmar que num ambiente com operações HFT o impacto dos choques nas séries tenham menor permanência.

**Tabela 4 - Estimações Volatilidade x Volume (expressão 5)**

P.	M. e D. (2008) <sup>1</sup>	M. e D. (2008)	Exp. 5 s/ vol. (2000 - 2005)	Exp. 5 c/ vol. (2000 - 2005)	Exp. 5 s/ vol. (2009 - 2014)	Exp. 5 c/ vol. (2009 - 2014)
$\alpha_0$	0,000179	-0,000122	0,000648	0,000557	0,000535	0,000535
$\alpha_1$	-0,478***	-0,475***	-0,482***	-0,482***	-0,497***	-0,490***
$\beta_0$	0,000032	0,0000046	0,000031***	-0,000059	0,0000182***	-0,000145***
$\beta_1$	0,104***	0,164***	0,101***	0,105***	0,109***	0,122***
$\beta_2$	0,836***	0,703***	0,842***	0,835***	0,835***	0,810***
$\beta_3$	-	0,0000006	-	0,000000866**	-	0,0000016***
Per.	0,940	0,867	0,943	0,939	0,944	0,932

<sup>1</sup>Medeiros e Doornik (2008). \*\*Significante a 5%. \*\*\*Significante a 1%.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização das operações por alta frequência no Brasil é recente. Enquanto nos E.U.A. o HFT passa por um momento de desconfiança, sendo até indagado sobre quantos realmente entendem o funcionamento; no Brasil, os executivos desejam aumentar o número de operações, acreditando que o país está em estágio semelhante aos dos E.U.A. antes do rápido crescimento.

O tema HFT possui uma demanda significativa em busca de informações, porém ainda pouco foi publicado a respeito, conforme apresenta Aldridge (2010). Diante disto, o artigo de Araújo e Montini (2013) contribuiu ao analisar a relação entre retornos, volume e número de negociações no mercado financeiro dividindo períodos antes e depois do início do HFT no Brasil. Entretanto, a relação destas variáveis com a volatilidade não foi verificada.

Uma das hipóteses levantadas pelos opositoristas ao HFT, conforme Kirilenko et al (2011), seria que os investidores de HFT poderem manipular o mercado, dado que os algoritmos reagem rapidamente a novas informações e transacionam altíssimo volume financeiro. Este comportamento poderia gerar o acionamento de forma descontrolada de ordens *start* (entrada) ou *stop* (saída) alterando o equilíbrio do mercado e aumentando a volatilidade.

Em busca de estudar tais afirmações, o presente artigo teve o objetivo de analisar a relação entre a volatilidade e volume na bolsa de valores brasileira em momentos antes e pós-iniciação das estratégias HFT. Deste modo, o artigo revisou um dos modelos de retorno e volume estudado em Araújo e Montini (2013) e atualizou as estimações com dados mais recentes.

Quanto a relação entre preços e retornos, o artigo demonstrou não existir uma relação significativa nos períodos estudados; demonstrando resultados similares com os

trabalhos de Granger and Morgenstern (1963), Godfrey, Granger and Morgenstern (1964), James and Edmister (1983), Wood, McNish and Ord (1985) e Araújo e Montini (2013).

Quanto a análise entre número de negociações e volume, encontrou-se resultados demonstrando o crescimento do número de negociações com o passar dos anos, principalmente na presença do HFT. Sendo que, tanto no período antes HFT quanto no pós HFT a relação foi positiva e significativa. Deste forma, o número de negociações influencia o volume transacionado e com o crescimento das operações HFT esta influência apresentou ainda mais força.

Quanto a relação entre volatilidade e volume, ao contrário dos resultados apresentados em Medeiros e Doornik (2008), os coeficientes foram positivos e significativos, sendo que a força da relação tendeu a aumentar a medida que o número de negociações aumentou. O resultado encontrado ocorreu conforme os modelos estudados em Tauchen e Pitts (1983), Karpoff (1987) e Lamoureux e Lastrapes (1990).

Deste modo, o presente artigo contribuiu de forma relevante ao demonstrar que a hipótese de distribuição mista (*Mixture of Distribution Hypothesis* - MDH) está adequada ao mercado brasileiro, sendo ainda mais presente nesta nova fase do mercado, com as operações em alta frequência.

Este resultado traz um alerta aos operadores de mercado, em que o uso exagerado do HFT pode gerar o acionamento de forma descontrolada de ordens *start* (entrada) ou *stop* (saída) alterando o equilíbrio do mercado brasileiro num curto espaço de tempo.

O presente artigo limitou-se a analisar somente a série do índice Bovespa, sendo necessário em trabalhos futuros verificar estas relações numa variedade maior de ativos, como índices de dividendos, *small caps* e energia elétrica. A metodologia de divisão de períodos em antes e pós HFT também é um fator limitante, dado que no período pós HFT o número de negociações pode ter aumentado não somente pela maior utilização de algoritmos, mas também devido a maior utilização dos *home brokers* por pessoa física.

Este fator não invalida os resultados, dado que muitas destas plataformas possuem algoritmos implementados e estão sendo adotadas pelos investidores/operadores. Diante disto, em trabalhos futuros, torna-se necessário investigar o impacto específico de uma operação HFT no mercado, isto será possível com a disponibilização de bases de dados contendo informações evento a evento (*tick by tick*).

## REFERÊNCIAS

ALDRIDGE, I. *High-Frequency trading: a practical guide to algorithmic strategies and trading systems*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.

ANDERSEN, T. G. *Return volatility and trading volume: an information flow interpretation of stochastic volatility*. *Journal of Finance*. Vol. 51, n. 01, p. 169-204, 1996.

ARAÚJO, A. C.; MONTINI, A. A. *High Frequency Trading: Abordagem Clássica para Análise de Preço-Volume em uma Nova Microestrutura de Mercado*. In: SEMINÁRIOS EM ADMINISTRAÇÃO - SEMEAD, 16, 2013, São Paulo. *Anais...* São Paulo: SEMEAD, 2013.

CLARK, P. K. *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices.* **Econometrica**. Vol. 41, p. 135-155, 1973.

EPPS, T. W. *Security price changes and transaction volumes: theory and evidence.* **American Economic Review**. Vol. 65, p. 586-597, 1975.

EPPS, T. W. *The demand for brokers' services: the relation between security trading volume and transaction cost.* **Bell Journal of Economics**. Vol. 7, p. 163-194, 1976.

GODFREY, M. D.; GRANGER, C. W. J.; MORGENSTERN, O. *Random walk hypothesis of stock market behavior.* **Kyklos**, Vol. 17, n. 0, p. 1-30, 1964.

GRANGER, C. W. J.; MORGENSTERN, O. *Spectral analysis of New York stock market prices.* **Kyklos**. Vol. 16, p. 1-27, 1963.

HARRIS, L. *Cross-Security tests of the mixture of distributions hypothesis.* **Journal of Financial and Quantitative Analysis**. Vol. 21, p. 39-46, 1986.

IOSCO. Regulatory Issues Raised by the Impact of Technological Changes on Market Integrity and Efficiency. Relatório Final, International Organization of Securities Comissions - IOSCO, 2012. Disponível em: <<http://www.iosco.org/library/pubdocs/pdf/IOSCOPD361.pdf>>. Acesso em: 17/04/2013.

JAMES, C.; EDMISTER, R. O. *The relation between common stock returns trading activity and market value.* **Journal of Finance**. Vol. 38, p. 1075-1086, 1983.

JENNINGS, R. H.; STARKS, L. T.; FELLINGHAM, J. C. *An equilibrium model of asset trading with sequential information arrival.* **Journal of Finance**. Vol. 36, p. 143-161, 1981.

KARPOFF, J. M. *The relation between price changes and trading volume: a survey.* **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**. Vol. 22, n. 01, 1987.

KIRILENKO, A. A.; KYLE, A. S.; SAMADI, M.; TUZUN, T. *The flash crash: the impact of high frequency trading on an electronic market.* **Working Paper**. Disponível em: <http://ssrn.com/abstract=1686004> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1686004>. Acesso em: 19/01/2013.

KUPFER, J. P. Utopias em alta frequência. EXAME.com. In: **ESTADÃO conteúdo**, 23 mai. 2011. Disponível em: <[http://blogs.estadao.com.br/jpkupfer/utopias-em-alta-frequencia/?doing\\_wp\\_cron=1363564940.6436629295349121093750](http://blogs.estadao.com.br/jpkupfer/utopias-em-alta-frequencia/?doing_wp_cron=1363564940.6436629295349121093750)>. Acesso em: 15/05/2013.

LAMOUREUX, C. G.; LASTRAPES, W. D. *Heteroskedasticity in stock return data: volume versus GARCH effects.* **Journal of Finance**. Vol. 45, n. 01, p. 221-229, 1990.

LEE, B. S.; RUI, O. M. *The dynamic relationship between stock returns and trading volume: domestic and cross-country evidence.* **Journal of Banking and Finance**. Vol. 26, n. 01, p. 51-78, 2002.

LINDGREN, B. W. *Statistical Theory*. New York: Macmillan, 1976.

MAZZONI, C. High-frequency trading brings American whiz-kid to Brazil. **VALOR.com**. 25 out. 2012. Disponível em: <<http://www.valor.com.br/international/news/2878790/high-frequency-trading-brings-american-whiz-kid-brazil#ixzz2TV7WJPfO>>. Acesso em: 16/05/2013.

MEDEIROS, O. R.; DOORNIK, B. F. N. V. *The empirical relationship between stock returns, return volatility and trading volume in the Brazilian stock market*. **Brazilian Business Review - BBR**. Vol. 5, n. 01, p. 01-17, 2008.

PHILLIPS, P. C. B. *Understanding spurious regressions in econometrics*. **Journal of Econometrics**. Vol. 33, p. 311-340, 1986.

PORTNOY, K. *High frequency trading and the stock market: a look at the effects of trade volume on stock price changes*. **The Park Place Economist**. V. 19, n.1, 2011. Disponível em: <http://digitalcommons.iwu.edu/parkplace/vol19/iss1/15>. Acesso em: 19/03/2013.

PORTUGAL, M. Investidor de alta frequência ganha seu espaço dentro da Bovespa. **EXAME.com**. In: **Acesso Direto**, 09 ago. 2010. Disponível em: <<http://exame.abril.com.br/mercados/noticias/investidor-alta-frequencia-ganha-seu-espaco-dentro-bovespa-585958>>. Acesso em: 09/04/2013.

ROCHA, A. A estagnação da bolsa: faltam investidores ou cias? **VALOR.com**. In: **O Estrategista**, 01 abr. 2012. Disponível em: <http://www.valor.com.br/valor-investe/o-estrategista>. Acesso em: 07/05/2013.

SEABRA, L. Homem x Máquina. **VALOR.com**. 10 mar., 2014. Disponível em: <http://www.valor.com.br/financas/3455242/homem-x-maquina#ixzz2vaN82tBT>. Acesso em: 16/04/2014.

SEC. Concept Release on Equity Market Security, 17 CFR Part 242, Release No. 34-61358. Securities and Exchange Commission, 2010.

SMIRLOCK, M.; STARCKS, L. *A transactions approach to testing information arrival models*. **Working Paper**. Washington University, 1984.

TAUCHEN, G.; PITTS, M. *The price variability-volume relationship on speculative markets*. **Econometrica**. Vol. 51, p. 485-505, 1983.

WOOD, R. A.; MCINISH, T. H.; ORD, J. K. *An investigation of transactions data for NYSE stocks*. **Journal of Finance**. Vol. 60, p. 723-739, 1985.

YING, C. C. *Stock market prices and volumes of sales*. **Econometrica**. Vol. 34, p. 676-686, 1966.