UTILIZAÇÃO DE CADEIAS DE MARKOV PARA AVALIAÇÃO DE CARTEIRAS DE CRÉDITO

Luiz Carlos Jacob Perera(*)

RESUMO

Avaliar carteiras tem sido uma preocupação crucial para os profissionais da área de finanças. O presente texto mostra como, utilizando Cadeias de Markov aplicadas a processos estocásticos, de forma simples e eficaz, podemos avaliar carteiras de crédito com base, apenas, em sua *performance* no último período. A metodologia, que utiliza cálculo matricial, é robusta permitindo o cálculo da variância dos resultados verificados e, conseqüentemente, sua utilização em modelos de *Value-at-Risk (Creditmetrics)* que avaliam risco de crédito de acordo com a moderna teoria de *portfólio.* O modelo pode, ainda, ser ajustado para variações cíclicas e processos não estacionários.

(*) Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Administração da FEA/USP. Pós-Graduado em Sociologia pela PUC de Porto Alegre. Professor da Universidade Mackenzie e do MBA Executivo da Fundação Instituto de Administração - FEA/USP. Consultor de Empresas na Área de Crédito. E-mail: jperera@ruralsp.com.br.

Revisão de Conceitos

Para desenvolver o tema proposto, inicialmente faremos uma revisão dos conceitos de álgebra matricial relevantes. Para tal, seguiremos o roteiro desenvolvido por Lipschutz[1].

Multiplicação de Matrizes

Existem casos especiais de multiplicação de matrizes que são relevantes para o melhor entendimento dos cálculos que serão desenvolvidos a seguir.

Se A é uma matriz n-quadrada, então podemos formar todas as potências de A :

$$A^2 = A.A \quad , \quad A^3 = A^2 . A \quad , \quad A^4 = A^3 . A \quad , \quad .... \quad , A^n = A^{n-1} . A$$

Além disso, se u é um vetor com n componentes, então podemos formar o produto uA, que é também um vetor com n componentes. Chamamos u ¹ 0 um *vetor fixo* (ou *ponto fixo*) de A, se u é fixo à esquerda, isto é, se não se altera quando multiplicado por A :

$$uA = u$$

Neste caso, para qualquer escalar k ¹ 0, temos

$(ku)A = k(uA) = ku$, ou seja

Teorema 1:

Se u é um vetor fixo da matriz A, então cada múltiplo escalar, não-nulo, de u é também um vetor fixo de A .

Exemplo 1:

Consideremos a matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Então o vetor $u = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$ é um vetor fixo de A, pois

$$uA = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\left(\frac{2}{3} . \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} . \frac{1}{2} \right), \left(\frac{2}{3} . \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} . \frac{1}{2} \right) \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = u$$

Assim, pelo Teorema 1, o vetor $2u = \frac{4}{3}, \frac{2}{3}$ também é um vetor fixo de A :

$$2uA = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right) \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\left(\frac{4}{3} . \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{2}{3} . \frac{1}{2} \right), \left(\frac{4}{3} . \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{2}{3} . \frac{1}{2} \right) \right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right) = 2u$$

Vetores de Probabilidades e Matrizes Estocásticas

Um vetor $u = (u_1, \; u_2, \; u_3, \; .... \; , u_n)$ é chamado vetor de probabilidade, se seus componentes são não negativos e somam 1.

Uma matriz quadrada $P = p_{ij}$ é chamada matriz estocástica, se cada uma de suas linhas é um vetor de probabilidade, isto se cada entrada de p é não negativa, e a soma das entradas em cada linha é igual a 1.

Teorema 2 :

Se A e B são *matrizes estocásticas*, então o produto de AB é uma matriz estocástica. Conseqüentemente, todas as potências de A^n são matrizes estocásticas.

Matrizes Estocásticas Regulares

Uma matriz estocástica P é considerada *regular* se todas as entradas de *alguma* potência de P^n são positivas

Exemplo 2 :

A matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

é regular, desde que

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

tem todas as entradas positivas.

Exemplo 3 :

Consideremos a matriz estocástica $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e suas potências,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \; B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}; \; B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{15}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \ldots$$

Toda potência de A terá 1 e 0 na primeira linha, logo B não é regular.

Pontos Fixos e Matrizes Estocásticas Regulares

A propriedade fundamental das matrizes estocásticas regulares está contida no teorema a seguir.

Teorema 3

Seja P uma matriz estocástica regular, então:

I. P tem um único vetor fixo de probabilidade *(t)*, e os componentes de t são todos positivos;

II. As entradas das potências $P, \; P^2, \; P^3, \; .... \; , P^n$ convergem para as entradas correspondentes da matriz T , cujas linhas são todas iguais ao do vetor fixo t ;

III. Se p é qualquer vetor de probabilidade, então, a seqüência de vetores $pP, \; pP^2, \; pP^3, ...$ converge para o vetor fixo t ;

Consideremos a matriz estocástica regular do exemplo 2, $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Como se trata de uma matriz quadrada *2 X 2*, o *vetor fixo* de probabilidade deve ser do tipo 1 *X 2* e terá a forma *(x , 1- x)*. Sabemos que *tP = t*, logo

$$\left(x\,,\,1 - x \right) \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(x\,,\,1 - x \right)$$

Multiplicando-se o lado esquerdo da equação matricial temos:

$$\left(\frac{3}{4}X + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}X,\ \frac{1}{4}X + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}X \right) = \left(X, 1\text{-}X \right)$$

ou

$$\begin{cases} \frac{3}{4}X + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}X = X \\ \\ \frac{1}{4}X + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}X = 1 - X \end{cases} \qquad ou \quad X = \frac{2}{3}$$

Assim, $t = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$ é o *único* vetor fixo de *P*.

Pelo Teorema 3, a sequência P, P^2, P^3, ..., P^n converge para a matriz *T*, cujas linhas são o vetor fixo *t* :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}67 & 0{,}33 \\ 0{,}67 & 0{,}33 \end{pmatrix}$$

Cadeias de Markov

Antes de prosseguirmos, torna-se conveniente aprofundar o conceito de processo estocástico. Segundo Clarke e Disney[2], um processo estocástico é um fenômeno que varia em algum grau de forma imprevisível, à medida que o tempo passa. A imprevisibilidade, nesse caso, significa que se observou uma seqüência inteira do processo em diversas ocasiões diferentes, sob condições presumivelmente *idênticas*; as seqüências em observação, resultantes, seriam, em geral, diferentes. Assim, a probabilidade aparece, mas não no sentido de que cada resultado de uma experiência aleatória determine um único número. Ao invés, a experiência aleatória determina o comportamento de algum sistema para uma seqüência ou intervalo de tempo inteiro. Isto é, o resultado da experiência aleatória é uma seqüência ou série de valores, uma *função*, e não apenas um único número.

Por exemplo, a probabilidade de haver infratores, no sistema de rodízio implantado na cidade de São Paulo, nos diversos dias da semana, ou diversos períodos do dia, são diferentes.

Chama-se cadeias de Markov um processo estocástico com as seguintes propriedades:

I) Cada resultado pertence a um conjunto finito de resultados *(* a_1, a_2 , a_3 , ..., a_n *)*, chamado *espaço dos estados do sistema*; se o resultado da *n*-ésima tentativa é a_i , dizemos que o sistema se encontra no estado a_i no instante *n*.

II) O resultado de qualquer ensaio depende, no máximo, do resultado do ensaio imediatamente anterior e não de qualquer dos precedentes; a cada par de estados *(* a_i, a_j *)* está associada à probabilidade P_{ij} de que ocorra a_j imediatamente após ter ocorrido a_i.

Os valores atribuídos a p_{ij} correspondem às probabilidades de transição de um para outro estado, isto pode ser visto através da chamada *matriz de transição P*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{ij} \end{pmatrix}$$

Assim, a cada estado a_i corresponde a *i*-ésima linha $(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ij})$ da matriz de transição *P*; se o sistema está no estado a_i, então esse vetor linha representa as probabilidades de todos os possíveis resultados do próximo ensaio; por isso é um vetor de probabilidade.

Teorema 4 :
A matriz de transição de uma Cadeia de Markov é uma matriz estocástica.

Exemplo 4:
Três crianças arremessam a bola uma para a outra. A sempre arremessa para B; B sempre arremessa para C; e C arremessa a bola para A ou para B, com a mesma probabilidade. Esta é uma Cadeia de Markov, pois a pessoa que arremessa a bola num determinado instante não é influenciada por aquelas que arremessaram anteriormente. O espaço de estado do sistema é $\{A, B, C\}$ e a matriz de transição é apresentada a seguir :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

A primeira linha da matriz corresponde ao vetor que indica que A sempre passa a bola para B; a segunda linha corresponde ao fato de que B sempre passa a bola para C; a última linha corresponde ao fato de que C arremessa a bola para A ou B com idênticas probabilidades, não ficando com a bola.

Distribuição Estacionária de uma Cadeia de Markov

Pelo Teorema 3, verificamos que a sequência das matrizes de transição em n etapas convege para a matriz *T*, cujas linhas são iguais ao único vetor fixo de probabilidade t de P; portanto, a probabilidade de evolução do estado a_i para o estado a_j (para um n suficientemente grande) *independe do estado inicial* de a_i.

Teorema 5:
Supondo que a matriz de transição P de uma Cadeia de Markov seja regular. Então para n suficientemente grande, a probabilidade de que qualquer estado a_i ocorra é aproximadamente igual à correspondente t_j do único vetor fixo de probabilidade t de P, para todo j. Assim vemos que o efeito do estado inicial da distribuição desaparece conforme o número de etapas aumente.

Além disso, toda seqüência de distribuição de probabilidades converge para o vetor fixo de probabilidade t de P, chamado *distribuição estacionária* da Cadeia de Markov.

Exemplo 5 :
Considerando a cadeia de Markov do exemplo 4, cuja matriz de transição é:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo para o único vetor fixo da matriz P temos $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)$. Assim, após um número sificientemente grande de etapas, a bola estará com A, numa probabilidade de 0,20, ou, com B ou C com a probabilidade de 0,40.

Estados Absorventes

Um estado a_i de uma Cadeia de Markov é chamado absorvente se o sistema permanece no estado a_i, uma vez que esse estado tenha sido visitado. Assim, um estado a_i é chamado absorvente se e somente se a *i*-ésima linha da matriz de transição P, tem 1 (um) na diagonal principal e 0 (zero) nas outras posições.

A Memória das Cadeias de Markov

Segundo Clarke e Disney[2], a seqüência aleatória $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ é dita uma sequência dependente de Markov ou um processo de Markov, caso a probabilidade condicional

$$p\left(i_n \mid i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\right) = P\left(a_n = i_n \mid a_1 = i_1, a_2 = i_2, \ldots, a_{n-1} = i_{n-1}\right)$$

dependa apenas dos valores de i_n e i_{n-1}. Isto significa

$$p\left(i_n \mid i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\right) = p\left(i_n \mid i_{n-1}\right), \tag{1}$$

$$P\left(a_n = i_n \mid a_1 = i_1, a_2 = i_2, \ldots, a_{n-1} = i_{n-1}\right) = P\left(a_n = i_n \mid a_{n-1} = i_{n-1}\right).$$

De uma forma geral a identidade (1) significa que se o sistema é referido como tendo alcançado o estado i_{n-1} no *(n – 1) ésimo* estágio, é irrelevante determinar que cadeia de estágios atravessou ao longo do caminho que o conduziu a esse estado, no que diz respeito a predizer (fornecer probabilidades para ...) que estado vai assumir no próximo estágio. Em outras palavras, o sistema *não possui memória* que lhe possibilite usar informações quanto ao seu comportamento antes que um estado conhecido tenha sido alcançado, de modo a modificar as probabilidades para o próximo estado.

Se o estado do sistema é conhecido no *momento presente (estágio n-1),* então o *futuro (estágio n)* comportamento do sistema não depende do *passado (estágios 1, 2, 3, ... , n-2).* Essa propriedade com frequência é expressa de maneira vaga: *Em uma sequência dependente de Markov, o conhecimento do presente torna o futuro independente do passado.*

Exemplo 6:

Se estou no 5º lançamento de uma moeda honesta, de uma série de dez, com interesse na ocorrência de quantidade de caras, e já somei três caras, o próximo lançamento poderá atingir quatro caras ou permanecer nas três caras já somadas, com probabilidade de 50% para ambos. Não interessa o resultado alcançado nos lançamentos anteriores.

As seqüências aleatórias dependentes, ou Cadeias de Markov são de ampla aplicabilidade. Em geral, qualquer processo que seja desprovido de memória no sentido aqui referido, e que lista possíveis posições ou efeitos, cairá nesta categoria.

Exercício de Aplicação

Cyert et al[3] verificaram que a estimativa dos valores considerados como devedores duvidosos costuma seguir dois passos: (1) classificam-se as contas por idade, que refletem o estado em que a conta se encontra: um mês de atraso, dois meses de atraso, etc. ; (2) a seguir estima-se uma expectativa de perda para cada estado, geralmente com base na política da empresa, situação econômica esperada e outros fatores similares.

Segundo os autores, a segunda parte do processo merecia uma investigação e tentativa de melhora dos métodos utilizados. Prosseguindo em sua análise, desenvolveram um método para estimar a probabilidade de devedores duvidosos, com base nas Cadeias de Markov.

Usando procedimento semelhante, pretendemos desenvolver um processo que poderá ser utilizado para a avaliação de uma carteira de crédito com base nos índices de inadimplência verificados.

Se numa determinada data fizermos um levantamento de uma carteira de crédito, poderemos facilmente verificar os seguintes estados das contas em carteira:

A_0 = valores a serem recebidos que ainda não venceram, ou seja estão em dia ou *com 0 (zero)* meses de atraso;

A_1 = valores a serem recebidos que estão com *1 (um)* mês de atraso;

....

A_j = valores a serem recebidos que estão com *j (jota)* meses de atraso;

....

A_{n-1} = valores a serem recebidos que estão com *n -1* meses de atraso;

A_n = valores a serem recebidos que estão com *n* meses de atraso;

Essa disposição corresponde a uma classificação rotineira da idade das contas a receber, sendo o estado A_0 a conta que está em dia, A_1 a conta com um mês de atraso, e assim por diante. A_n é a situação dos considerados incobráveis (créditos de liquidação duvidosa ou incobráveis). Na prática o número de idades das contas pode variar de instituição para instituição ou por categorias de crédito, tais como crédito imobiliário, leasing, financiamentos direto ao consumidor, etc.

Se considerarmos um levantamento de contas a receber provenientes do período *i* , para o período seguinte *i + 1*, que denominaremos de *j* , a conta poderá ser classificada com relação a esses dois índices, o período anterior e o período em que se encontra no momento atual. De forma geral, teremos A_{jk} igual ao levantamento da categoria *k* no tempo *i + 1,* o qual é proveniente da categoria j no tempo *i.*

Para considerarmos todas as possíveis categorias devemos acrescentar mais uma categoria àquelas descritas anteriormente. Trata-se da categoria correspondente aos títulos classificados como pagos, que serão denotados como $\bar{0}$. Valores classificados em qualquer categoria no período *i* podem mover-se para a categoria dos títulos pagos $\bar{0}$ ou para qualquer outra categoria de *0* a *n* no período *i + 1.*

Usando esse sistema de classificação, um levantamento dos recebíveis no período *i* pode ser descrito como uma matriz de transição de probabilidades *P*, uma matriz quadrada com *n + 2* elementos. As probabilidades P_{jk} serão definidas como a probabilidade de um valor classificado como *j* no período *i* evoluir para uma classificação *k* no período *i + 1*. Em termos de entradas, A_{jk} , as probabilidades de transição P_{jk} são definidas :

$$P_{jk} = \frac{A_{jk}}{\sum_{\bar{0}}^{n} A_{jk}} \qquad \left(k = \bar{0},\ 0, 1, \ldots, n\right)$$

A matriz *A* de transição é uma matriz de probabilidades cujos vetores denotados por *j* são não negativos e somam *1* . Os estados classificados como *pago* e *débitos em liquidação* são dois estados absorventes; os demais estados organizam-se de acordo com a idade das contas.

Como as normas do Banco Central[4] determinam que os créditos vencidos há mais de 60 (sessenta) dias, sem garantias, sejam transferidos para as contas de Créditos em Liquidação dos Bancos e demais Instituições Financeiras, consideramos os períodos mensais e o período *3* como o correspondente aos créditos em liquidação, que denotaremos por *L*.

Dessa forma a nossa matriz de transição com a transposição do vetor vertical correspondente aos débitos em liquidação, denotado por L , assume o seguinte formato:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \bar{0} & L & 0 & 1 & 2 \end{array} \\
P = & \begin{pmatrix}
\bar{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
L & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A_{0\bar{0}} & A_{03} & A_{00} & A_{01} & A_{02} \\
1 & A_{1\bar{0}} & A_{13} & A_{10} & A_{11} & A_{12} \\
2 & A_{2\bar{0}} & A_{23} & A_{20} & A_{21} & A_{22}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

A matriz P, apresentada pode ser particionada :

$$
P = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline R & Q \end{array} \right)
$$

na qual I é uma matriz 2 X 2, identidade; 0 é uma matriz 2 X 3, nula; R é uma matriz 3 X 2, dos estados absorventes; e, Q, a matriz 3 X 3 dos estados não absorventes.

A matriz apresentada possui um problema comum às equações simultâneas (para o qual a álgebra matricial poderá ser útil), pois, se considerarmos como incógnitas as posições dos estados absorventes, eles também farão parte da *explicação* da equação. Conseqüentemente, chamando

$$
N = (1 - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots + Q^3 + \ldots \qquad (2)
$$

Verificamos que a equação (2) existe e, segundo Chiang[5], quando k é suficientemente grande fazendo com que Q tenda a zero, nos dá uma boa aproximação da raiz inversa $(1 - Q)^{-1}$.

Finalmente, a matriz n x 2, *NR (*)*, nos dá a probabilidade de absorção $(\bar{0}$ e $L)$ em cada um dos estados, isto é, as entradas em $\bar{0}$ mostram as probabilidades de pagamento, e as entradas em L as probabilidades de não pagamento, para cada estado: pagamentos em dia, atraso de um mês e atraso de dois meses.

(*) A multiplicação da matriz N por R é justificada no apêndice

Exemplo 7 : Um exercício numérico

CADEIAS DE MARKOV

Em 1º de março foi levantada uma amostra de 105 contas, e em 31 de março foi verificado o comportamento dessas contas:

DE 1º. MARÇO A 31 DE MARÇO	INTEGR. PAGAS	EM DIA	ATRASO 1 MÊS	ATRASO 2 MESES	PERDA	TOTAL
EMITIDAS ATÉ 28/02 (contas em dia)	15	10	15	0	0	40
EMITIDAS ATÉ 31/01 (contas um mês de idade)	12	9	9	15	0	45
EMITIDAS ATÉ 31/12 (contas dois meses idade)	3	4	4	6	3	20

A primeira linha significa que, das faturas emitidas no mês de fevereiro, num total de 40, 15 foram pagas, 10 ainda não venceram e 15 venceram e não foram pagas, contando o atraso de um mês. A segunda linha mostra que, de 45 faturas emitidas no mês de janeiro, 12 foram pagas, 9 ainda não venceram, 9 apresentam atraso de um mês e 15 atraso de dois meses. Finalmente, a última linha mostra que de 20 faturas emitidas no mês de dezembro, além da seqüência de pagamentos e atrasos, 3 correspondem à perda, ou seja, atraso superior a 2 meses.

Ajustando as quantidades para vetores de probabilidades; considerando as faturas pagas $\left(\bar{0}\right)$ e perdas $\left(L\right)$ como estados absorventes; e, transpondo a coluna de perda, podemos gerar a seguinte matriz de transição:

$$\begin{pmatrix} & \bar{0} & L & 0 & 1 & 2 \\ \bar{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}38 & 0{,}00 & 0{,}25 & 0{,}38 & 0{,}00 \\ 1 & 0{,}27 & 0{,}00 & 0{,}20 & 0{,}27 & 0{,}33 \\ 2 & 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}30 \end{pmatrix}$$

A matriz de transição pode ser particionada: (I) uma matriz identidade, na qual os estados absorventes permanecem; (0) uma matriz nula; (R) uma matriz dos estados absorventes; e (Q) a matriz dos demais estados.

$$P = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}38 & 0{,}00 & 0{,}25 & 0{,}38 & 0{,}00 \\ 0{,}27 & 0{,}00 & 0{,}20 & 0{,}27 & 0{,}33 \\ 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}30 \end{array}\right) \quad P = \left(\begin{array}{c|c} (I) & (0) \\ \hline (R) & (Q) \end{array}\right) \text{ sendo}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}38 & 0{,}00 \\ 0{,}27 & 0{,}00 \\ 0{,}15 & 0{,}15 \end{pmatrix} \quad e \quad Q = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}38 & 0{,}00 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}33 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}30 \end{pmatrix}$$

$$N = (1 - Q)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,25 & 0,38 & 0,00 \\ 0,20 & 0,20 & 0,33 \\ 0,20 & 0,20 & 0,30 \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$N = (1 - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,75 & -0,38 & 0,00 \\ -0,20 & 0,80 & -0,33 \\ -0,20 & -0,20 & 0,70 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,69 & 0,90 & 0,43 \\ 0,71 & 1,79 & 0,85 \\ 0,68 & 0,77 & 1,79 \end{pmatrix}$$

$$NR = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,06 \\ 0,87 & 0,13 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix}$$

A matriz resultante da multiplicação NR nos dá as probabilidades de pagamento para os estados: contas em dia (94%), contas com atraso de um mês (87%) e contas com atraso de dois meses (73%).

Este procedimento pode ser aplicado na avaliação de uma carteira de crédito :

Situação da Carteira	Valor Nominal	Probabilidade de Pagamento	Valor Probabilístico (Cadeias de Markov)
Contas em dia	4.000,00	0,94	3.760,00
Contas com atraso de 1 mês	600,00	0,87	522,00
Contas com atraso de 2 meses	400,00	0,73	292,00
Valor da Carteira	**5.000,00**		**4.574,00**

CONCLUSÃO

No presente texto usamos o procedimento de Cadeias de Markov para avaliar uma carteira de crédito. Uma carteira de crédito aproxima-se do modelo proposto pois, considerando os créditos concedidos, verifica-se que esses créditos evoluem com o passar do tempo como uma seqüência de estados que vão desde pagos, até dois meses de atraso e a seguir, créditos incobráveis. Verifica-se, ainda, que esses mesmos estados representam o conjunto de resultados possíveis de qualquer estado, o que caracteriza o processo como um sistema de equações simultâneas, a ser resolvido com o auxílio de cálculo matricial.

Outra propriedade que justifica a adoção do processo de Markov é que a probabilidade de um resultado qualquer depende apenas do estado anterior em que se encontrava. Por exemplo, analisando créditos concedidos há um mês, verificamos que esses créditos podem evoluir, para *pagos* ou até *atraso de dois meses*. Considerando que a empresa concede créditos até dois meses, os créditos não podem evoluir para o estado absorvente *(créditos em liquidação)*, sem passar pelo estado imediato, ou seja créditos concedidos há dois meses. No entanto, os créditos com qualquer período de maturidade podem evoluir para créditos pagos, o outro estado absorvente.

O processo de Cadeias de Markov utilizado permite-nos responder às seguintes questões:

I. Qual a provável distribuição dos recebíveis, por categoria de idade, ao final de cada período;

II. Qual o estado estacionário (pagos ou incobráveis) dos créditos a receber distribuídos por categoria de idade;

III. Qual o provável percentual dos valores negociados que será efetivamente recebido.

Os resultados verificados podem ainda ser enriquecidos com o cálculo da sua variância, permitindo assim sua aplicabilidade em modelos de *Value-at-Risk (Creditmetrics).* O modelo pode, também, ser adaptado às variações ciclícas[6]. Frydman et al[7], estudaram as aplicações do modelo de Cadeias de Markov, considerando inclusive a possibilidade de o modelo não se tornar estacionário.

A metodologia apresentada tem ampla aplicabilidade nos meios financeiros, podendo ser ajustada para : (1) Acompanhamento de desempenho ou auditoria de agências bancárias, comparando-as com o universo médio ou histórico; (2) Auditoria de empresas, pelo acompanhamento da evolução do estado de suas contas a receber; (3) Definição de políticas de cobrança, em função dos resultados e custos envolvidos no processo[8] ; (4) Fixação de valores caucionados, em função da avaliação das contas a receber do tomador; (5) Para as empresas de *factoring*, pode servir como parâmetro de risco, quando da aquisição do faturamento de terceiros; (6) Avaliação de *portfólios* quando da aplicação de derivativos de crédito, etc.

BIBLIOGRAFIA

LIPSCHUTZ, Seymour. *Probabilidade*. S.P. : Makron Books, p. 207-223, 1993

CLARKE, A. **BRUCE** e **DISNEY**, Ralph L. *Probabilidade e Processos Estocásticos*. R.J. : LTC, p.192, 1979

CYERT, R.M., **DAVIDSON** H.J., e Thompson, G.L. *Estimation of the Allowance for Doubtful Accounts by Markov Chains.* Management Science, 8, April, p. 287-303, 1962

Letra A do item VIII do Art. 1° da Resolução no. 001748, de 29 de agosto de 1990, do Banco Central do Brasil

CHIANG, Alpha C. *Matemática para economistas*. Editora da Universidade de São Paulo, Mc Graw-Hill, SP, p. 111, 1982

CYERT et al. Op. cit, p. 297

FRYDMAN, H., **KALLBERG**, J.G. e **KAO**, D.L. *Testing the Adequacy of Markov Chains and Mover-Stayer Models as Representations of Credit Behavior*. in Rosenberg, Eric e Gleit, Alan. *Quantitative Methods in Creddit Management: A Survey.* Operations Research, V. 42, no. 4, Jul-Aug 1994, p. 589-613, 1994

MEHTA, Dileep R. *Administração do Capital de Giro*. S.P.: Atlas, p.54, 1978.

APÊNDICE

Apresentamos a seguir a solução matemática para o sistema de equações simultâneas:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= X_1 q_{11} + X_2 q_{12} + X_3 q_{13} \ldots + r_{11} + r_{12} \\
X_2 &= X_1 q_{21} + X_2 q_{22} + X_3 q_{23} \ldots + r_{21} + r_{22} \\
X_3 &= X_1 q_{31} + X_2 q_{32} + X_3 q_{33} \ldots + r_{31} + r_{32}
\end{aligned}
$$

sendo, X = estados não absorventes (em dia, um mês de idade, dois meses, etc)

q = coeficientes dos estados não absorventes

r = estados absorventes (pagas e incobráveis).

Significando que o vetor de probabilidade de qualquer estado não absorvente depende de sua própria probabilidade e das probabilidades de situar-se nos demais estados. Por exemplo: o vetor de probabilidade do estado em dia faz referência às contas que estão em dia mais as em atraso de um mês, as que foram pagas, etc.,

Fazendo uma simples transposição algébrica e colocando X em evidência:

$$
\begin{aligned}
X_1 (1 - q_{11}) - X_2 q_{12} - X_3 q_{13} \ldots &= r_{11} + r_{12} \\
- X_1 q_{21} + X_2 (1 - q_{22}) - X_3 q_{23} \ldots &= r_{21} + r_{22} \\
- X_1 q_{31} - X_2 q_{32} + X_3 (1 - q_{33}) \ldots &= r_{31} + r_{32}
\end{aligned}
$$

Operando em forma de cálculo matricial, temos

$$
\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix}
$$

ou seja

$$
\boldsymbol{(1 - Q)X = R} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X = (1 - Q)^{-1}R}
$$

que nos dá a matriz fundamental das Cadeias de Markov, fazendo $(1 - Q)^{-1} = N$

$\boldsymbol{X = NR}$, solução apresentada por Cyert et al.