

# PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES EUROPÉIAS E EXÓTICAS (*PATH-DEPENDENT*) POR SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

*Ricardo Sassatani*<sup>(\*)</sup>  
*José de Oliveira Siqueira*<sup>(\*\*)</sup>

## RESUMO

Apesar do sucesso e da importância obtidos no mundo acadêmico e financeiro pelos derivativos, poucos autores procuraram explorar de forma didática os resultados matemáticos referentes à avaliação de opções. Neste artigo foram apresentados alguns modelos matemáticos que expressam o processo estocástico para a taxa de retorno de um ativo e que podem ser utilizados no cálculo do prêmio de opções. Para simular a aleatoriedade das taxas e preços do ativo empregou-se o método de Monte Carlo. De acordo com os resultados obtidos, para um dado número de simulações, o método de Monte Carlo é capaz de produzir resultados semelhantes ao modelo de Black-Scholes. Também foram apresentados alguns resultados dos preços de opções exóticas obtidos pela simulação de Monte Carlo.

---

(\*) Mestrando do Programa de Pós-graduação da FEA/USP. Bacharel em Administração pela FGV/SP. Organizador dos Seminários Avançados de Finanças. E-mail: rsassata@usp.br

(\*\*) Professor da Área de Métodos Quantitativos do Departamento de Administração da FEA/USP. Bacharel em Estatística pelo IME/USP. Doutorando em Administração pela FEA/USP. Organizador dos Seminários Avançados de Finanças. E-mail: siqueira@usp.br

## INTRODUÇÃO

A avaliação de contratos de opções ou de ativos contingenciais é um assunto que tem despertado o interesse de pessoas nos meios acadêmico e financeiro. Os acadêmicos estiveram preocupados com o desenvolvimento de uma teoria que explicasse a lógica dos preços das opções e com a construção de uma fórmula que resultasse em um preço de equilíbrio. Neste sentido, os trabalhos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973) foram tão importantes para que se pudesse compreender a complexidade por trás deste assunto que, em 1973, Scholes e Merton foram agraciados com o Prêmio Nobel de Economia. Os profissionais do setor financeiro, por outro lado, estiveram mais interessados no desenvolvimento de novas operações de opções e na possibilidade de se obter ganhos de arbitragem. Estas também tiveram sua relevância ao cumprir o papel de disseminação das operações envolvendo opções.

Devido à complexidade das equações para precificação de opções, é comum a sua utilização sem o devido entendimento. O modelo de Black e Scholes, por exemplo, pode ser inserido em uma planilha eletrônica ou calculadora financeira, e qualquer pessoa conseguirá obter o resultado final desde que conheça as variáveis da equação. A compreensão do raciocínio e das passagens matemáticas que levaram à formação da equação de Black e Scholes proporciona uma vantagem: a de abstrair elementos importantes para a construção de modelos para avaliação de opções utilizando a simulação de Monte Carlo. Conforme afirma Luenberger (1998, p. 363), o método de Monte Carlo é um instrumento poderoso e de fácil implementação para calcular preços de opções em que não existem soluções analíticas. Também é uma ferramenta útil para precificar as opções cujos preços dependem da trajetória (*path-dependent*) do preço do ativo-objeto. Evidentemente, uma equação matemática produz resultados mais práticos e rápidos do que simulações em computadores. Porém, na ausência destas equações, não restam outras alternativas senão soluções numéricas ou por simulação.

O objetivo deste artigo é apresentar alguns resultados matemáticos importantes para a

precificação de opções, mostrar que a simulação de Monte Carlo produz preços semelhantes à fórmula de Black e Scholes e, finalmente, apresentar os preços obtidos pela simulação para as opções asiática e *look-back*.

## Dinâmica do Retorno do Ativo

As opções, contratos futuros e outros tipos de derivativos existem em virtude da imprevisibilidade dos preços dos ativos em uma economia. Se estes fossem previsíveis, não haveria risco, não seria possível especular sobre os preços futuros e não haveria necessidade de proteção. As operações envolvendo derivativos existem fundamentalmente em função do caráter aleatório dos preços e retornos dos ativos. Curiosamente, conforme afirma Campbell, Lo e Mackinlay (1997, p. 27), os alicerces da moderna teoria de finanças surgiram nas tentativas e esforços dos estudiosos de elaborar ferramentas para prever preços de ativos e “bater o mercado”.

Embora seja difícil, senão impossível, prever o preço de um ativo, a precificação de um contrato de opção requer o conhecimento do preço ou distribuição de probabilidade dos preços do ativo-objeto na data de vencimento. Partindo da hipótese que o preço futuro é desconhecido, é necessário construir um modelo que apresente a *dinâmica dos preços ou retornos* do ativo-objeto na data de exercício. Segundo Wilmott, Howison e Dewynne (1997, p. 19), “quase todos os modelos de precificação de opção se baseiam em um modelo simples para o movimentos dos preços”.

O modelo da dinâmica do retorno do ativo adotado neste artigo segue o conceito de passeio aleatório (*random walk*), que se baseia na hipótese de eficiência de mercado. De acordo com esta hipótese:

- a) os preços dos ativos refletem toda informação passada;
- b) o mercado responde imediatamente ao surgimento de uma nova informação.

O item “a” da hipótese mencionada está de acordo com a propriedade de Markov. Se um

ativo segue o processo de Markov, a única informação relevante para o investidor é seu preço atual. As previsões dos preços para o futuro não são afetadas pelos que ocorreu no passado. E como os preços futuros são incertos devem ser expressos em termos de distribuição de probabilidade (Hull, 1997, p.210). O aspecto mais interessante do modelo foi mencionado no item “b” em que as perturbações (aleatoriedade) nos preços são provenientes do aparecimento de novas informações a cada instante. O conjunto destas mudanças influenciará os preços do ativo, dando surgimento a diversas trajetórias dos preços em função do tempo. Este conjunto de trajetórias é também conhecido como processo estocástico.

Uma maneira de representar matematicamente a dinâmica do retorno do ativo, que é encontrada em Merton (1973), Neftci (1996), Hull (1997), Wilmott et al. (1997), pode ser descrito pelo modelo abaixo:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz_t \text{ (eq. 1), sendo}$$

$dS_t/S_t$ : taxa de retorno discreta do ativo  
 $dt$ : intervalo de tempo infinitesimal  
 $\mu$ : esperança da taxa de retorno discreta do ativo<sup>1</sup>  
 $\sigma$ : desvio-padrão da taxa de retorno  
 $dz_t$ : variável aleatória com distribuição normal  $N(0;dt)$

A equação acima também é usualmente conhecida como *equação diferencial estocástica*. Ela mostra que o retorno  $dS_t/S_t$  do ativo no intervalo  $dt$  é composto por um termo determinístico  $\mu dt$  e por uma variável aleatória  $\sigma dz_t$ , que segue uma distribuição normal com média 0 e variância  $\sigma^2 dt$ . Portanto, a taxa de retorno do ativo segue um processo de Wiener

<sup>1</sup> A taxa de retorno composta continuamente é  $\mu - \sigma^2/2$ , pois  $\eta = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ . Como  $\ln(S_t/S_0)$  tem distribuição normal com esperança  $(\mu - \sigma^2/2)(T-t)$ , então  $\eta$  tem distribuição normal com esperança  $\mu - \sigma^2/2$  (Hull, 1997, p.230-2).

generalizado e tem distribuição normal  $N(\mu dt; \sigma^2 dt)$ .

Um aspecto interessante da equação diferencial estocástica diz respeito à dimensão das variáveis envolvidas. A taxa de retorno do ativo  $dS_t/S_t$  não possui unidade, ou seja, é adimensional. Isto decorre do fato da taxa de retorno esperada do ativo  $\mu$  e do desvio-padrão da taxa de retorno  $\sigma$  terem como dimensões  $t^{-1}$  e  $t^{-1/2}$ , respectivamente (Wilmott et al., 1997, p. 81). Como o intervalo de tempo tem unidade  $t$  e a variável aleatória possui dimensão  $t^{1/2}$ , o produto das variáveis gera uma variável adimensional.

### Processo de Wiener

Os modelos de retornos de ações são expressos em termos do que se conhece como processo de Wiener. Conforme afirma Hull (1997), este tipo de processo é utilizado na física para descrever o movimento de uma partícula sujeita a choques de outras moléculas, fato também denominado Movimento Browniano. Na fórmula anterior, o termo  $dz_t$  representa a componente estocástica, responsável pela produção de variações inesperadas. A construção de modelos de precificação de derivativos baseados em processos estocásticos exige que sejam conhecidas as propriedades da variável aleatória.

Diz-se que uma variável  $z_t$  segue um processo de Wiener padrão ou movimento Browniano se seu diferencial  $dz_t$  possuir duas propriedades:

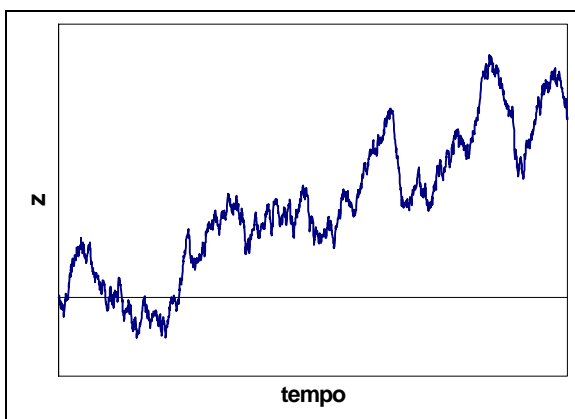
- a)  $dz_t$  pode ser expresso pela equação  $dz_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$  (eq. 2), sendo  $\varepsilon_t$  uma variável aleatória obtida com distribuição normal padronizada  $N(0;1)$ . Logo, a variável  $dz_t$  também apresenta uma distribuição normal com os parâmetros de média e variância iguais a 0 e  $dt$ , respectivamente.
- b) as variáveis  $dz_t$  para dois intervalos de tempo  $(dt)$  distintos são independentes.

Ross<sup>2</sup> (1997, p. 524) ainda complementa que a variável  $z_t$  segue movimento Browniano padrão se:

- a) o processo iniciar do 0:  $z_0 = 0$ ;
- b) o conjunto dos possíveis valores de  $z_t$ , para  $t \geq 0$ , possuem incrementos independentes e estacionários;
- c) para cada instante tempo  $t > 0$ ,  $z_t$  tem distribuição normal com média 0 e variância  $t$ .

O gráfico 1 ilustra uma possível trajetória das variáveis  $z_t$  no tempo que seguem um processo de Wiener padrão:

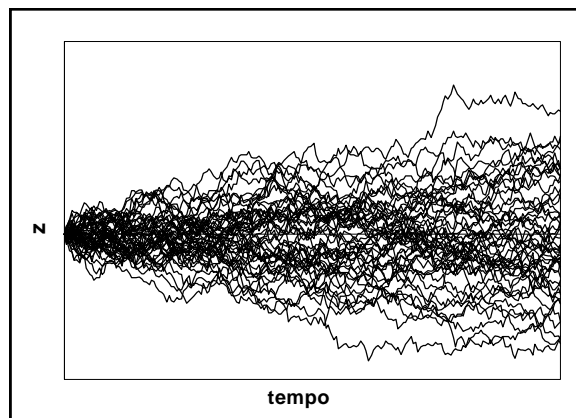
**Gráfico 1 - Simulação de uma trajetória do movimento browniano**



Observando o comportamento do processo estocástico  $\{z_t, t \geq 0\}$  pelo gráfico 1, nota-se uma série de “bicos” produzidos pelo processo aleatório. Uma função deste tipo não pode ser integrada ou derivada por métodos convencionais.

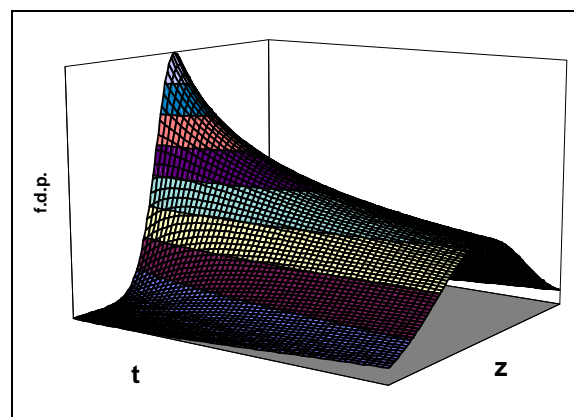
Um processo estocástico seria o conjunto de todas as trajetórias percorridas pelas variáveis  $z_t$  como ilustra o gráfico 2:

**Gráfico 2 - Processo Estocástico  $\{z_t, t \geq 0\}$**



O gráfico 3 representa a função de densidade de probabilidade da variável  $z_t$  em função do tempo. Observe que à medida que o tempo passa, a variância de  $z_t$  aumenta e passa a assumir valores mais extremos diminuindo a concentração em torno de sua média:

**Gráfico 3 – Funções Densidade de Probabilidade do Processo Estocástico  $\{z_t, t \geq 0\}$**



O resultado obtido no gráfico anterior também foi demonstrado por Hull (1997, p. 211). Analisando o comportamento de  $z_t$  durante um período relativamente longo de tempo  $T$ , pode-se descrever a variação como sendo  $z_T - z_0$ . A variação de  $z_t$  é o somatório dos incrementos de  $z_t$  em  $N$  intervalos pequenos de tempo  $\Delta t$ , sendo:

$$N = \frac{T}{\Delta t} \text{ (eq. 3)}$$

<sup>2</sup> O texto original de Ross utiliza a expressão  $X(t)$  para representar a variável que compõe o movimento browniano. Para uniformizar a notação e dar continuidade às demonstrações, foi feita a substituição por  $z_t$ .

Logo, a variação de  $z_t$  pode ser escrita como:

$$z_T - z_0 = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (\text{eq. 4})$$

$\varepsilon_i$ : são variáveis aleatórias com  $N(0,1)$  e são independentes entre si.

Note que a partir da equação anterior, pode-se inferir que  $z_T - z_0$  também tem distribuição normal com parâmetros  $N(0;T)$ . A soma de diversas variáveis aleatórias normais independentes é uma variável aleatória com distribuição normal.

Observe que para um dado instante de tempo  $T$ , a variável  $z_T$  também possui uma distribuição normal com média 0 e variância  $T$ :

$$z_T = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (\text{eq. 5}), \text{ pois } z_0 = 0.$$

Portanto, em qualquer intervalo de tempo  $T$ , o incremento no valor de uma variável que segue o processo de Wiener segue uma distribuição normal com média 0 e desvio-padrão  $T^{1/2}$ .

### Fórmula do Preço do Ativo

No item anterior, a taxa de retorno do ativo foi representada por uma equação diferencial estocástica do tipo:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz_t, \text{ em que } dz_t \sim N(0;dt)$$

Se a expressão acima fosse uma equação diferencial ordinária (com  $\sigma = 0$ ), seria fácil encontrar uma solução através da integração. Desta forma, seria possível isolar a variável  $S_t$  e obter uma função determinística  $S(\mu,t)$ , como a dedução a seguir:

$$\int_0^t \frac{dS_u}{S_u} = \int_0^t \mu du \quad (\text{eq. 6})$$

$$\ln|S_t|_0^t = \mu t \Rightarrow S_t = S_0 \cdot e^{\mu t} \quad (\text{eq. 7})$$

Analogamente, incluindo a componente estocástica na equação diferencial e integrando, teríamos:

$$\int_0^t \frac{dS_u}{S_u} = \int_0^t \mu du + \int_0^t \sigma dz_u \quad (\text{eq. 8})$$

Contudo, a integração de uma equação diferencial estocástica é bastante complexa e não segue as regras básicas do cálculo clássico. Para efetuar esta operação, seria necessário aplicar a integral de Ito, que é um instrumento matemático útil para lidar com variáveis aleatórias. Neftci (1996, p.172) afirma que a “*integral de Ito é uma maneira de somar os inúmeros e imprevisíveis incrementos aleatórios durante o tempo*”.

O processo que leva à solução da integral de Ito não será demonstrado neste artigo. O resultado final desta integração segue a fórmula abaixo:

$$S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma z_t} \quad (\text{eq. 9})$$

A expressão acima é a fórmula para o preço do ativo, cujas taxas de retorno instantâneas possuem uma distribuição normal. Ela é fundamental para modelar o comportamento do ativo no cálculo das opções e será utilizado na simulação de Monte Carlo. A variável aleatória  $S_t$  segue uma distribuição lognormal, pois o seu logaritmo é uma variável aleatória com distribuição normal. De acordo com Luenberger (1998, p.301), dada uma variável  $u(t) = e^{w(t)}$ , se  $w(t)$  for uma normal, então diz-se que  $u(t)$  segue uma distribuição lognormal.

Na expressão 9, a variável  $S_t$  segue um movimento browniano geométrico e possui os seguintes parâmetros, supondo que o processo inicie em  $t=0$  e  $S_0$  seja conhecido:

$$E[S_t] = S_0 \cdot e^{\mu t} \quad (\text{eq. 10})$$

$$\text{VAR}[S_t] = S_0^2 \cdot e^{2\mu t} \cdot (e^{\sigma^2 t} - 1) \quad (\text{eq. 11})$$

### Lema de Ito e sua Aplicação sobre o Diferencial Total Estocástico do Ativo

Uma maneira de descobrir se a eq.9 é a solução da integração da equação diferencial (eq. 1) é aplicando o Lema de Ito. O Lema de Ito estabelece uma expressão matemática que possibilita a obtenção do diferencial total de uma função cujas variáveis seguem um processo de

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial S_t} a(S_t, t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} b(S_t, t) \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S_t} b(S_t, t) dz_t \quad (\text{eq. 13})$$

A expressão acima nada mais é do que a expansão de Taylor para uma função que possui variáveis independentes determinísticas e aleatórias. A demonstração deste resultado pode ser obtida em Hull (1997, p.225).

O Lema de Ito será aplicado sobre a expressão 9 para provar que se trata de um resultado possível do diferencial do preço do ativo. A fórmula do preço do ativo obtida

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial z_t} a(z_t, t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial z_t^2} b(z_t, t) \right) dt + \frac{\partial G}{\partial z_t} b(z_t, t) dz_t \quad (\text{eq. 15})$$

Para simplificar as expressões das derivadas parciais de G em relação a  $z_t$  e  $t$  a seguir, substituiu-se o termo  $\mu - \sigma^2/2$  por  $\alpha$ :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \alpha \cdot S_0 \cdot e^{\alpha + \sigma z_t} = \alpha S_t \quad (\text{eq. 16}) \text{ e}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_t} = \sigma \cdot S_0 \cdot e^{\alpha + \sigma z_t} = \sigma \cdot S_t \quad (\text{eq. 17}) \text{ e}$$

$$dG(z_t, t) = \left( \sigma S_t \cdot 0 + \alpha S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t \cdot 1 \right) dt + \sigma S_t \cdot 1 \cdot dz_t \Rightarrow$$

$$dS_t = S_t \left[ \left( \alpha + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz_t \right] \Rightarrow \frac{dS_t}{S_t} = \left( \alpha + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz_t \quad (\text{eq. 19})$$

Wiener. Suponha o diferencial de uma variável  $S_t$  que varia em função do tempo ( $dt$ ) e de um fator aleatório ( $dz_t$ ):

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dz_t \quad (\text{eq. 12})$$

De acordo com este lema, se houver uma função G que varia em função de  $S_t$  e  $t$ , isto é  $G(S_t, t)$ , seu diferencial  $dG$  pode ser expresso da seguinte forma:

anteriormente pode ser considerada uma função das variáveis  $z_t$  e  $t$ , logo:

$$S_t = G(z_t, t) = S_0 \cdot e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma z_t} \quad (\text{eq. 14})$$

O diferencial da função G será expresso em relação a  $z_t$  e  $t$ . Efetuando-se a devida substituição no Lema de Ito descrito na eq.13, temos:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z_t^2} = \sigma^2 \cdot S_t \quad (\text{eq. 18})$$

Substituindo as derivadas parciais na expressão 15 e assumindo que  $a(z_t, t) = 0$  e  $b(z_t, t) = 1$ , pois  $dS_t = dz_t$  conforme equação 12, temos:

Como  $\alpha = \mu - \sigma^2/2$ , segue que:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz_t \sim N(\mu dt; \sigma^2 dt) \text{ (eq. 20)}$$

Outra aplicação do Lema de Ito é a resolução do diferencial do logaritmo dos preços ( $d \ln S_t$ ). A vantagem de se utilizar o logaritmo dos preços é que os termos multiplicativos passam a funcionar como uma simples soma. Seja uma função  $F(z_t, t) = \ln S_t$ . Pode-se escrever a partir da expressão 9 que:

$$\ln S_t = F(z_t, t) = \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma z_t \text{ (eq. 21)}$$

As derivadas parciais de  $F(z_t, t)$  em  $t$  e  $z_t$  são:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \text{ (eq. 22) e}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_t} = \sigma \text{ (eq. 23) e}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_t^2} = 0 \text{ (eq. 24)}$$

Assumindo que  $a(z_t, t) = 0$  e  $b(z_t, t) = 1$  e substituindo no Lema de Ito, temos:

$$d \ln S_t = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz_t \sim N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt; \sigma^2 dt \right] \text{ (eq. 25)}$$

Observa-se que a expressão 25 é semelhante à obtida pelo cálculo  $dS_t/S_t$ , exceto pelo fator de ajuste  $\sigma^2/2$ . Segundo Luenberger (1998, p. 310), este fator de ajuste decorre da transformação da variável  $S_t$  para  $\ln S_t$  e é igual ao ajuste necessário quando se calcula a esperança de uma variável aleatória com distribuição lognormal. Existe uma relação entre os diferenciais de preços e do logaritmo dos preços dada pela expressão:

$$\frac{dS_t}{S_t} = d \ln S_t + \frac{\sigma^2}{2} \text{ (eq. 26)}$$

Observe que  $S_t$  dado pela equação 9 também é solução da equação diferencial estocástica 25. Se  $S_t$  fosse uma variável determinística, pela regra da cadeia, teríamos:

$$\frac{d}{dt} \ln S_t = \frac{1}{S_t} \frac{d}{dt} S_t \Rightarrow d \ln S_t = \frac{dS_t}{S_t}$$

### Conceito de Opção e o Modelo de Black & Scholes

Antes de prosseguir com o aspecto da avaliação de opções é fundamental ter a definição precisa do que se entende por opção. Um contrato de opção pode ser definido como um direito de comprar (ou vender) um determinado ativo por um preço prefixado ( $K$ ) até (ou na) data de exercício ( $T$ ). Participam deste contrato duas partes que se denominam titular e lançador. O detentor deste direito, chamado titular da opção, paga um prêmio ao lançador da opção que passa a ter uma obrigação. A avaliação de um contrato de opção significa determinar um preço justo para o prêmio.

As opções podem ser classificadas quanto ao tipo em:

- opção de compra (*call option*);
- opção de venda (*put option*).

Quanto ao momento do exercício, as opções se classificam em:

- européias: o titular da opção pode exercer seu direito de compra (ou venda) somente na data de vencimento;
- americanas: o titular da opção pode exercer seu direito de compra (ou venda) a qualquer momento entre a data da operação e o dia do vencimento.

Este artigo não vai lidar com a avaliação de opções americanas<sup>3</sup>, somente européias. A avaliação das opções americanas é mais complexa, pois a cada instante é preciso determinar se o exercício antecipado produz benefícios ao titular da opção. Dado o princípio da arbitragem, os valores de uma opção de compra (*call*) e uma opção de venda (*put*) no vencimento devem ser representados por:

$$c_T = \text{Máx}[0; S_T - K] \text{ (eq. 27)}$$

$$p_T = \text{Máx}[0; K - S_T] \text{ (eq. 28)}$$

$c_T$ : prêmio da *call* no instante T (vencimento);

$p_T$ : prêmio da *put* no instante T;

$S_T$ : valor do ativo em T;

K: preço de exercício.

Observe que as expressões acima mostram o valor terminal das opções no instante T. O problema reside na avaliação do prêmio em momentos anteriores ao vencimento (t, para  $t \leq T$ ). Neste caso,  $S_T$  passa a ser uma variável aleatória e é necessário assumir uma hipótese sobre a distribuição de probabilidade dos preços ( $S_T$ ) ou taxas de retorno futuros do ativo-objeto. Além disso, é preciso determinar uma taxa de desconto apropriada para antecipar os resultados financeiros da opção.

Desta forma, em um instante de tempo t, tal que  $t \leq T$ , segundo Ross (1997, p.538), Hunter e Stowe (1992, p.32), Hull (1997, p. 241) e Luenberger (1998, p.357) o preço de uma *call* européia pode ser descrito como o valor presente da média dos resultados:

$$c_{t,T} = \frac{E\{\text{Máx}[0; S_T - K]\}}{e^{\mu(T-t)}} \text{ (eq. 30)}$$

Substituindo o termo  $S_T$  pelo modelo do preço do ativo-objeto, dado que o processo inicie a partir da data 0 e assumindo uma avaliação livre de risco, pode-se substituir  $\mu$  pela taxa livre de risco  $r$ :

$$c_{0,T} = \frac{E\{\text{Máx}[0; S_0 \cdot e^{(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma z_T} - K]\}}{e^{\mu T}} \Rightarrow c_{0,T} = \frac{E\{\text{Máx}[0; S_0 \cdot e^{(r - \sigma^2/2)T + \sigma z_T} - K]\}}{e^{rT}} \text{ (eq. 29)}$$

<sup>3</sup> Mais detalhes sobre a avaliação de opções americanas podem ser obtidos em Wilmott et al. (1997, p. 106) e Hull (1997, p. 384).



Este é o modelo para precificação de opções de compra européias em um contexto livre de risco<sup>4</sup> para ativos cujos preços seguem um movimento geométrico *browniano*. Ross (1997, p.538) provou que a partir da equação anterior o valor justo do prêmio pode ser expresso da seguinte forma:

$$c_{0,T} \cdot e^{rT} = \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^y - K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi T \sigma^2}} e^{-\frac{(y - (r - \sigma^2/2)T)^2}{2T\sigma^2}} dy \quad (\text{eq. 31})$$

$c_{0,T}$ : valor do prêmio no instante 0 para uma opção com exercício em T;

$$y = (r - \sigma^2/2)T + \sigma z_T$$

Resolvendo a equação 31 chega-se a mesma equação obtida por Black e Scholes (1973):

$$c_{0,T} = S_0 \cdot \phi(D_1) - \frac{K}{e^{rT}} \phi(D_1 - \sigma\sqrt{T}) \quad (\text{eq. 32}),$$

sendo

$\phi(\cdot)$ : função de probabilidade acumulada de uma normal padronizada.

$$D_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (\text{eq. 33})$$

Observe que substituindo o instante inicial 0 por  $t \leq T$  e T por T-t temos:

$$c_{t,T} = S_0 \cdot \phi(D_1) - \frac{K}{e^{r(T-t)}} \phi(D_1 - \sigma\sqrt{T-t})$$

$$D_1 = \frac{\ln(S_t / K) + (r + \sigma^2 / 2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

O resultado final obtido por Black e Scholes demonstra que é possível avaliar uma opção de compra a partir de alguns parâmetros determinísticos como preço à vista do ativo, volatilidade da taxa de retorno, prazo, taxa de juros livre de risco e preço de exercício. A solução analítica alcançada pelos autores não depende do fator aleatório presente no processo

de Wiener. É importante ressaltar que nem sempre é possível obter um resultado em que o termo aleatório é eliminado da equação. Nas opções em cuja expressão matemática não for possível eliminar a componente aleatória, tais como asiáticas e *look-back*, pode-se adotar como alternativa a avaliação pelo método de simulação de Monte Carlo.

### Condição de Contorno

Um elemento fundamental na avaliação dos contratos de opções é a chamada condição de contorno (*boundary condition*) ou valor intrínseco. Pode-se dizer que a condição de contorno é o núcleo da expressão matemática que define uma opção. Nas equações 27 e 28, foram apresentados os valores terminais das opções de compra e de venda expressas sob condições de contorno, que definiam os limites do domínio da função prêmio da opção. Tratam-se de resultados de teoremas que regem a formação de preços sob o ponto de vista de um investidor racional. Merton (1973, p. 143) definiu algumas relações importantes envolvendo a precificação de opções, entre as quais:

- a)  $c(S;t;K) \geq 0$ : uma *call* européia tem sempre valor igual ou superior a 0;
- b)  $c(S;t;K) \leq S$ : uma *call* européia não pode custar mais que o preço do ativo-objeto;
- c)  $c(S;t;K_1) \geq c(S;t;K_2)$ : uma *call* com preço de exercício menor ( $K_1$ ) deve ter um valor igual ou superior a outra com menor preço de exercício ( $K_2$ );

<sup>4</sup> Sobre a hipótese de neutralidade ao risco e suas implicações no modelo de Black e Scholes, ver Hull (1997, p. 239).

- d)  $c(S;t;K) \geq \text{Máx}[0; S - VP(K)]$ : o preço de uma *call* européia deve ser igual ou superior ao seu valor intrínseco;
- e)  $S = c(S;t=\infty;K=0)$ : o preço do ativo corresponde a uma *call* perpétua com preço de exercício igual a 0.

Cada espécie de opção possui uma condição de contorno característica baseada no resultado financeiro final proporcionado pelo direito de exercício. A opção de compra européia possui como condição de contorno o valor  $\text{Máx}[0; S_T - K]$ . A opção de venda, por sua vez, tem seu valor como  $\text{Máx}[0; K - S_T]$ .

### Opção Asiática e Opção Look-back

O desenvolvimento do mercado financeiro provocou o surgimento de novas operações que são variações dos modelos básicos de opções de compra e venda (*plain vanilla*). Dentre elas, existe uma categoria de opções cujos prêmios dependem da trajetória dos preços do ativo-objeto durante o tempo (*path-dependent options*). Ou seja, o resultado da opção depende dos preços passados seja para o cálculo do preço de exercício ou do preço final do ativo (Wilmott et al., 1997, p. 197).

É comum se referir às opções *path-dependent* como sinônimo de opções exóticas. Hull (1997, p. 457) argumenta que uma opção exótica é aquela que se diferencia dos modelos padrões de opção de compra e opção de venda e possui um resultado financeiro mais complexo. Neste sentido, as opções *path-dependent* são exóticas. Contudo, nem todas as opções exóticas se enquadram na categoria de *path-dependent*. Os modelos mais conhecidos e que serão utilizados na simulação de Monte Carlo são as opções denominadas asiáticas e *look-back*.

Uma opção asiática é aquela cujo resultado financeiro e, conseqüentemente, seu prêmio depende da média dos preços do ativo-objeto (Luenberger, 1998, p. 369). Existem duas maneiras desta média dos preços ser utilizada:

- a) parâmetro para o preço final da opção (*asian fixed-strike*): o titular da opção terá o direito de receber a diferença positiva entre a média

dos preços do ativo-objeto e seu preço de exercício:

$$c_0 = \frac{E\{\text{Máx}[0; S_{\text{médio}} - K]\}}{e^{\mu T}} \quad (\text{eq. 34})$$

$$S_{\text{médio}} = E[S_t, t \geq 0] \quad (\text{eq. 35})$$

- b) parâmetro para o preço de exercício (*asian floating strike*): o titular da opção tem o direito de comprar um ativo pelo preço médio durante um período de tempo:
- c)

$$c_0 = \frac{E\{\text{Máx}[0; S_T - S_{\text{médio}}]\}}{e^{\mu T}} \quad (\text{eq. 36})$$

Quanto à apuração da média dos preços do ativo durante o tempo, é possível efetuar a média aritmética ou média geométrica. Neste artigo, será efetuada a avaliação das opções asiáticas de compra e de venda em que o preço de exercício é a média aritmética dos preços entre a data inicial e a data de vencimento. Conforme afirma Hunter et al. (1992, p.36), ainda não existe uma equação capaz de avaliar uma opção asiática baseada em média aritmética devido à complexidade matemática.

A opção *look-back* é uma espécie de contrato que garante ao seu titular o direito de comprar, no caso da *call*, um ativo pelo preço mínimo observado durante a existência da opção. Ou o direito de vender, no caso da *put*, um ativo pelo seu preço máximo durante o período em questão. Utilizando o modelo de avaliação neutro ao risco, pode-se escrever que os valores da *call* e *put look-back* são:

$$c_0 = \frac{E\{\text{Máx}[0; S_T - S_{\text{mín}}]\}}{e^{rT}} \quad (\text{eq. 37})$$

$$p_0 = \frac{E\{\text{Máx}[0; S_{\text{máx}} - S_T]\}}{e^{rT}} \quad (\text{eq. 38})$$

## Metodologia: Simulação de Monte Carlo no Cálculo do Preço Justo de Opções

A simulação de Monte Carlo<sup>5</sup> é um procedimento numérico utilizado para a geração de amostras de valores pseudo-aleatórios de uma variável a partir de sua função de densidade de probabilidade (Mooney, 1997). O método de Monte Carlo será empregado para gerar valores pseudo-aleatórios para o cálculo das opções de compra e venda básicas, asiáticas e *look-back*. A idéia da simulação consiste no sorteio de números que simularão os retornos diários e, conseqüentemente, a trajetória do preço do ativo no tempo. O comportamento do preço do ativo possui o mesmo formato do empregado em Hunter et al. (1992, p. 37), Boyle (1977, p.328) e Broadie et al. (1996, p.271):

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma z_t \cdot \sqrt{\Delta t}} \quad (\text{eq. 39}), \text{ sendo:}$$

r: taxa livre de risco contínua;

$\sigma$ : volatilidade da taxa de retorno do ativo-objeto<sup>6</sup>;

$\Delta t$ : intervalo de tempo (dia útil);

$\epsilon_t$ : variável aleatória com distribuição normal padronizada.

<sup>5</sup> Como referência de aplicações do método de Monte Carlo sobre avaliações de investimento, ver Bruni, Famá e Siqueira (1998, p. 63) in *Caderno de Pesquisa em Administração*, 1º trim/98.

<sup>6</sup> Como os preços são observados em intervalos de tempo fixos e o modelo do comportamento do preço do ativo está definido para todo instante de tempo, torna-se necessário determinar a taxa de retorno composta continuamente. Então  $s$   $\sqrt{\text{fração do período}}$  pode ser estimado por

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} \quad \text{onde} \quad u_i = \ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right).$$

Logo,  $s$  pode ser estimado por

$$\hat{s}^* = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\text{fração do período}}} \quad \text{cujo erro-padrão é}$$

aproximadamente  $\frac{\hat{s}^*}{\sqrt{2n}}$  (Hull, 1997, p. 232-5).

A partir das informações do preço inicial do ativo, da taxa livre de risco, da volatilidade da taxa de retorno e do intervalo de tempo, serão gerados números pseudo-aleatórios em uma planilha eletrônica que definirão os preços do ativo para cada instante de tempo  $t$  até o vencimento da opção ( $T$ ). Cada iteração consistirá na geração de 500 trajetórias para o preço do ativo do instante inicial até a data final com 35 passos (dias úteis). Este processo será repetido até gerar 100 amostras pseudo-aleatórias para o cálculo do valor do prêmio.

A estimativa para o valor da opção será calculado a partir da esperança dos valores gerados por cada iteração:

$$\hat{c} = \frac{E[\text{Máx}(\text{contorno})]}{e^{rT}} \quad (\text{eq. 40})$$

O desvio-padrão do preço médio da opção será:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} (\hat{c}_i - \bar{c})^2 \quad (\text{eq. 41})$$

O objetivo do estudo é saber se a simulação de Monte Carlo é capaz de produzir resultados próximos ao da equação de Black-Scholes e fornecer estimativas para os valores das opções asiáticas e *look-back* para um intervalo de confiança de 95%. Para a simulação, será adotado um caso empírico para avaliar opções da ação Telebrás PN da bolsa de valores de São Paulo.

### Dados Utilizados

As variáveis determinísticas utilizadas na simulação para o cálculo das opções serão detalhados a seguir:

- preço ( $S_0$ ): é o preço de fechamento da ação Telebrás PN no dia 29/junho divulgado pela Bovespa e publicado na Gazeta Mercantil;

- taxa de juros contínua ( $r$ ): é a projeção da taxa de juros obtidas a partir das cotações do DI Futuro negociado na BM&F;
- intervalo de tempo ( $\Delta t$ ): foi adotado o intervalo de um dia útil;
- prazo ( $T$ ): corresponde ao número de dias úteis entre a data da operação e o vencimento da opção (17/agosto);
- preço de exercício ( $K$ ): foram utilizados os dois preços de exercícios das opções de Telebrás com maior número de negócios do dia 19/junho.
- volatilidade ( $\sigma$ ): é a volatilidade implícita das opções calculadas a partir do modelo de Black e Scholes. Cada preço de exercício terá sua respectiva volatilidade implícita.

Os números aleatórios responsáveis pela produção dos ruídos foram criados pela ferramenta Gerador de Números Aleatórios do programa Excel 7.0 para Windows95. O número de variáveis foi igual ao prazo em dias úteis da operação ( $T$ ). A cada iteração, o programa gerou

500 números pseudo-aleatórios para cada variável, sendo que este processo se repetiu 100 vezes.

A Tabela 1 mostra os valores dos dados utilizados na simulação:

**Tabela 1 - Dados da simulação**

Variável	Valor
$r$	$\ln(1+0,0785\%)$
$S_0$	R\$ 124,60
$T$	35 d. úteis
$\Delta t$	1 dia útil
$K_1$	R\$ 130,00
$K_2$	R\$ 140,00
$\sigma_1$	2,942%
$\sigma_2$	2,718%

Para o cálculo das estimativas das opções de compra e venda básicas, asiáticas e *look-back*, foram utilizadas as seguintes equações:

$$\hat{c} = \frac{E\{\text{Máx}[0; S_T - K]\}}{e^{rT}} \quad (\text{eq. 42}) \quad \hat{p} = \frac{E\{\text{Máx}[0; K - S_T]\}}{e^{rT}} \quad (\text{eq. 43})$$

$$\hat{c}_{\text{asiat}} = \frac{E\{\text{Máx}[0; S_T - E\{S_t; T \geq t \geq 0\}]\}}{e^{rT}} \quad (\text{eq. 44})$$

$$\hat{p}_{\text{asiat}} = \frac{E\{\text{Máx}[0; E\{S_t; T \geq t \geq 0\} - S_T]\}}{e^{rT}} \quad (\text{eq. 45})$$

$$\hat{c}_{\text{look}} = \frac{E\{\text{Máx}[0; S_T - \text{Mín}\{S_t; T \geq t \geq 0\}]\}}{e^{rT}} \quad (\text{eq. 46})$$

$$\hat{p}_{\text{look}} = \frac{E\{\text{Máx}[0; \text{Máx}\{S_t; T \geq t \geq 0\} - S_T]\}}{e^{rT}} \quad (\text{eq. 47})$$

## RESULTADOS

Os valores das opções *call* e *put* básicas geradas pela simulação de Monte Carlo foram

bem próximos dos valores resultantes do modelo de Black e Scholes como demonstra a Tabela 2:

**Tabela 2 - Prêmios das opções: (Monte Carlo vs Black-Scholes)**

	<i>Call</i>		<i>Put</i>	
	<b>K<sub>1</sub> = 130</b>	<b>K<sub>2</sub> = 140</b>	<b>K<sub>1</sub> = 130</b>	<b>K<sub>2</sub> = 140</b>
<b>Black-Scholes</b>	7,80	3,80	9,68	15,41
<b>Monte Carlo</b>	7,85	3,78	9,70	15,40

A comparação dos resultados entre a simulação de Monte Carlo e o modelo de Black Scholes pode ser testada estatisticamente através do teste t de *Student (One-sample t-test)*. De

acordo com o teste, todos os valores apresentados pela simulação foram significantes ao nível de 5% conforme ilustra a Tabela 3:

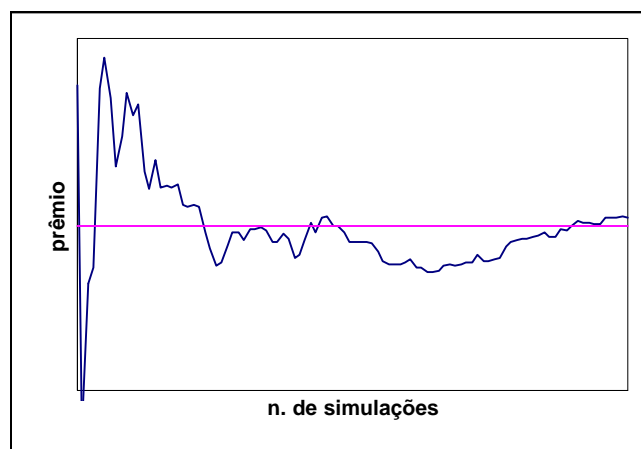
**Tabela 3 - Teste para Comparação dos Resultados**

	<b>t</b>	<b>graus de liberdade</b>	<b>Significância estimada</b>	<b>I.C. (95%)</b>
<b>Call (K = 130)</b>	0,859	99	0,393	7,73 - 7,97
<b>Call (K = 140)</b>	-0,673	99	0,502	3,70 - 3,85
<b>Put (K = 130)</b>	0,289	99	0,773	9,58 - 9,81
<b>Put (K = 140)</b>	-0,208	99	0,836	15,27 - 15,52

O aumento no número de simulações e, portanto, amostras obtidas tende a fazer com que o valor médio do prêmio da opção se aproxime do resultado obtido pela fórmula de Black e Scholes. O Gráfico 4 mostra o comportamento da média

do prêmio da *put* em função do número de simulações realizadas. Este fenômeno de convergência pode ser justificado pelo Teorema do Limite Central.

**Gráfico 4 - Média Parcial do Prêmio vs Número de Simulações**



Quanto aos valores das opções asiáticas e *look-back*, a Tabela 4 a seguir ilustrará as estatísticas do resultado:

**Tabela 4 - Prêmio das opções asiáticas e look-back**

<b>Tipo de opção</b>	<b><math>\sigma_1</math></b>	<b><math>\sigma_2</math></b>
<i>Asiática call</i>	5,71	5,33
<i>Asiática put</i>	4,06	3,69
<i>Look-back call</i>	15,91	14,87
<i>Look-back put</i>	13,96	12,71

Pode-se observar que as opções *look-back* apresentam um preço superior às demais em função da oportunidade que o titular possui de comprar ou vender ao melhor preço registrado durante a existência da opção. Uma opção *look-back* de compra ou venda sempre vai apresentar um valor igual ou maior que uma opção asiática. Este fato pode ser constatado pela condição de contorno de cada uma das opções. Contudo, não se pode tirar conclusões ao comparar os prêmios de opções asiáticas ou *look-back* com as opções básicas sem levar em consideração o valor do preço de exercício. As opções básicas com preço de exercício inferior ao preço à vista (dentro do dinheiro) podem ter um prêmio superior ao das opções *look-back*.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos resultados obtidos, pode-se demonstrar que a simulação de Monte Carlo é um instrumento eficaz na avaliação de contratos de opções. Os valores gerados pela simulação foram muito próximos aos dos obtidos pelo Modelo de Black e Scholes. Quanto maior o número de iterações produzidas na simulação, menor é a diferença entre os resultados. Também procurou-se mostrar que o método de Monte Carlo é um instrumento flexível na avaliação de opções *path-dependent* para as quais não existem soluções analíticas.

É evidente que a simulação de Monte Carlo possui a desvantagem em relação ao tempo demandado pelo processamento dos dados. Avaliação de opções com muitas variáveis aleatórias e maior quantidade de iterações exigem

capacidade e velocidade de processamento do equipamento utilizado. A falta de modelos de avaliação para as opções do tipo *path-dependent*, contudo, não nos permitiu formar conclusões a respeito da qualidade dos valores obtidos pela simulação.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BLACK**, Fischer e M. **SCHOLES**. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, 81, 637-659, 1973.
- BOYLE**, Phelim P. “Options: A Monte Carlo Approach”, *Journal of Financial Economics*, 4, p. 323-338, 1977.
- BROADIE**, Markie e P. **GLASSERMAN**. “Estimating Security Price Derivatives Using Simulation”, *Management Science*, vol. 42, n. 2, Feb., 1996.
- BRUNI**, Adriano L., R. **FAMÁ** e J. de O. **SIQUEIRA**. “Análise do risco na avaliação de projetos de investimento: uma aplicação do método de Monte Carlo”, *Caderno de Pesquisas em Administração*, vol.1, nº 6, São Paulo, 1º trim/1998.
- CAMPBELL**, John Y., A. W. **LO** e A. **MACKINLAY**. *The Econometrics of Financial Markets*, Princetown University Press, New Jersey, 1997.
- HULL**, John C. *Options, Futures, And Other Derivatives*, 3ª ed., Prentice Hall, New Jersey, 1997.
- HUNTER**, William C. e D. W. **STOWE**. “Path Dependent Options: Valuation and Applications”, *Economic Review*, jul/ago, 30-43, 1992.
- LEMGRUBER**, Eduardo F. *Avaliação de contrato de opções*, BM&F, São Paulo, 1992.
- LUENBERGER**, David G. *Investment Science*, Oxford University Press, New York, 1998.
- MERTON**, Robert C. “Theory of rational option pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183, 1973.
- MOONEY**, Christopher Z. *Monte Carlo Simulation*, Sage University Paper Series on Quantitative Applications in the Social Sciences, vol. 116, Thousand Oaks, 1997.
- NEFTCI**, Salih N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, San Diego, 1996.
- ROSS**, Sheldon. *An Introduction to Probability Models*, 6ª ed., Academic Press, San Diego, 1997.
- WILMOTT**, Paul, S. **HOWISON** e J. Dewynne. *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.