# ANÁLISE DE DIVERSIFICAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO COMPOSTAS POR AÇÕES PERTENCENTES AO ÍNDICE BOVESPA:

## UM CONFRONTO ENTRE OS MODELOS DE SHARPE E MARKOWITZ

***Alexandre Lintz*** (*)
***Liliane Renyi*** (**)

**RESUMO**

A análise do efeito de diversificação de carteiras de investimento é baseada em princípios lançados pelos trabalhos de Markowitz e Sharpe. Porém algumas premissas assumidas pelo modelo de Sharpe podem levar a imprecisões devido à forma de cálculo de alguns de sues parâmetros.

Este trabalho, a partir de resultados obtidos em trabalhos anteriores, buscará medir as possíveis falhas que o modelo de Sharpe pode incorrer, e responder à seguinte questão. Será que as diferenças de análise do modelo de Sharpe são realmente significantes para carteiras compostas por ações presentes no Índice Bovespa?

(*) Engenheiro Metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo. E-mail: lintz@usp.br.

(**) Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.

## INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de técnicas de administração de carteiras de investimento é algo que tem motivado o trabalho de inúmeros pesquisadores da área financeira neste século. Porém, foi através do trabalho *Portfolio Selection* de Markowitz(13) e *Capital Asset Prices* de Sharpe(21) que este assunto teve grande impulso. Embora o modelo de Markowitz tenha um maior nível de precisão, o modelo de Sharpe tornou-se mais utilizado devido sua simplicidade. Porém, este último pode incorrer em alguns erros sutis devido fatores tais como escolha de um índice que represente o mercado e a análise da covariância entre os retornos de diversos ativos que compõem uma carteira de investimentos. Este último fator é mencionado, pois o modelo de Sharpe ao estimar a variância de uma carteira de ativos financeiros, considera como sendo nula as covariâncias entre os resíduos das regressões dos retornos dos ativos com os retornos do mercado. Embora este termo seja chamado de "residual", acredita-se que este número possa influenciar de maneira expressiva o cálculo de risco de carteiras compostas por ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo.

Dessa forma, este trabalho busca medir as possíveis falhas que o modelo de Sharpe pode levar a incorrer, através de uma comparação com resultados obtidos na diversificação de carteiras através cálculo de risco do Markowitz. Sabe-se *a priori* que o modelo de Markowitz é mais preciso que o de Sharpe, contudo, levanta-se a seguinte questão: Será que os erros de análise do modelo de Sharpe são realmente significantes para carteiras compostas pelas ações mais líquidas do mercado acionário de São Paulo?

O trabalho ainda discutirá o número ótimo de ações que permite se obter carteiras diversificadas para a população de estudo (as ações mais negociadas no mercado acionário de São Paulo), sempre se mantendo o paralelo na análise entre as duas metodologias desenvolvidas. Em trabalho anterior, Lintz e Renyi(12) empregaram esta análise a partir do modelo de Sharpe, contudo, a possível imprecisão ao se empregar este modelo requer que uma análise mais profunda dos números obtidos seja feita.

Uma breve análise sobre o risco diversificável e próprio será então realizada, visando-se discutir possíveis falhas de mensuração do risco ao se empregar como medida de risco a metodologia proposta pelo modelo de Sharpe.

Por fim, acredita-se que estudos buscando uma melhor compreensão das variantes que influenciam o cálculo de risco seja de fundamental relevância para a análise de risco de carteiras de investimento, ou ainda, num sentido mais amplo, para o cálculo de risco de instituições financeiras como um todo. A metodologia de Sharpe, que atualmente mostra-se muito disseminada e aceita tanto na comunidade acadêmica, assim como no mercado financeiro como um todo, para a análise de risco pode levar a eventuais distorções de análise. Basicamente, esta é a proposta do trabalho: abrir um espaço para se questionar a eficiência e acurácia de ambos os modelos, através de uma análise empírica por simulação de carteiras de ações.

## A Teoria

O desenvolvimento teórico de mercado de capitais nas últimas décadas tem se centrado basicamente na determinação do valor intrínseco de um ativo. A determinação deste valor, por sua vez, está relacionada às variáveis retorno e risco. Assumindo-se que o mercado é eficiente, pode se dizer que existe uma relação inexorável entre estas duas variáveis: quanto maior o risco de um ativo, maior será o prêmio exigido por se estar assumindo este risco. Dessa forma, a análise destes dois fatores é de fundamental importância para se obter um bom desempenho de uma carteira.

Com relação à variável risco, pode se encontrar estudos sobre esta variável desde a década de 20, mas foi através do trabalho *Portfolio Selection* de Markowitz(13) publicado em 1952 que este tema teve sua principal formulação. Através de seu trabalho, Markowitz busca responder a uma questão crucial: é possível minimizar o risco do investidor para um certo nível de ganho esperado? Caso se conseguisse responder a esta questão, poderia se criar técnicas racionais para analisar a diversificação de carteiras, em vez de apenas se seguir o provérbio simplista que até então vingava de que nunca se deve colocar todos os ovos em uma mesma cesta. Markowitz, por sua vez, tenta discutir em que cestas que se devem colocar os ovos, não simplesmente os espalhando aleatoriamente.

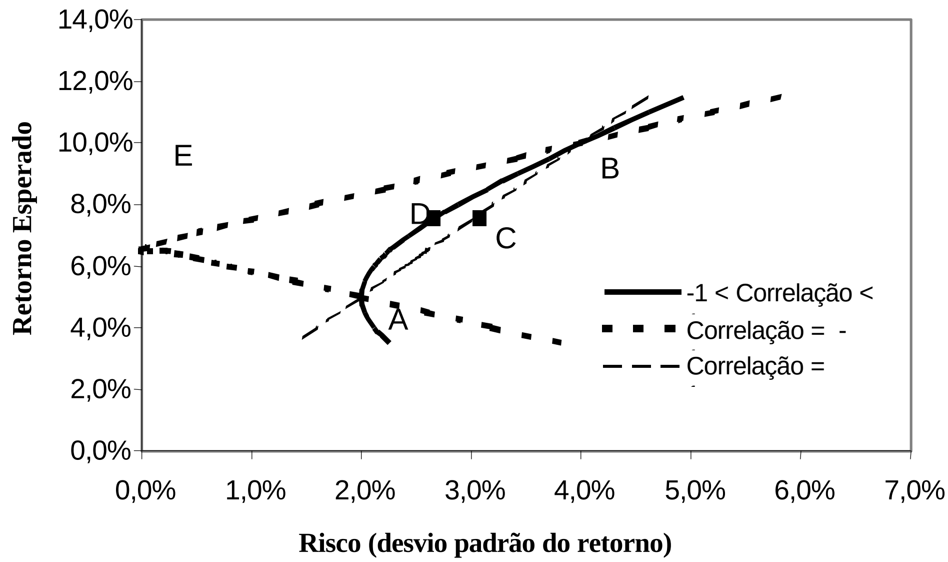


**Figura 1 - Curvas que Relacionam Risco com Retorno Esperado para Diferentes Correlações entre os Retornos dos Ativos**

O primeiro grande passo de Markowitz para suas descobertas foi quebrar o paradigma de que o retorno esperado de uma carteira de ações apresenta uma relação linear com o desvio padrão do retorno desta carteira, como pode se ver na Figura 1. A intuição das pessoas é imaginar que ao se alocar metade do dinheiro num ativo A com um desvio padrão do retorno de 2%, e metade em B com um desvio padrão do retorno de 4%, a carteira apresentará, assim, um desvio de 3% ((2%+4%)/2), localizando-se no ponto C da figura. Contudo, como pode se ver na figura, não necessariamente o desvio padrão será de 3%. Para se saber o quanto será o verdadeiro desvio padrão do retorno, precisa-se antes saber a correlação existente entre os ativos A e B, ou seja, precisa-se saber o grau de interdependência entre estes. A intuição das pessoas apenas estaria correta quando a correlação entre os ativos fosse igual a 1. Alternativamente, se a correlação estivesse entre -1 e 1, a relação capaz de explicar o risco e retorno não seria linear, mas sim hiperbólica, apresentando um risco inferior a 3% (ponto D). Por fim, caso a correlação fosse de -1, haveria até mesmo uma combinação entre os ativos A e B que apresentaria um retorno livre de risco (ponto E). Para o caso de correlação igual a -1 a equação que explica a relação risco e retorno seria linear. Escolhendo-se proporções corretas entre os ativos, dessa forma, consegue-se obter um risco para a carteira inferior à simples média do risco dos ativos, se não até mesmo nulo. Resta então otimizar a escolha retorno *versus* risco, valendo observar que quanto menor a correlação entre os ativos, maior será a diversificação e, assim, menor será o risco.

Suponha assim uma carteira formada por n ativos. O retorno desta carteira é dado por:

$$\tilde{R}_c = \sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{R}_i$$

onde,

$R_c$ é o retorno da carteira (variável aleatória)

$w_i$ é o peso de cada ativo na carteira
$R_i$ é o retorno do ativo *i* (variável aleatória)

Dada a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

O retorno médio da carteira será:

(1)

$$R_{uc} = E[\sum w_i \tilde{R}_i] = \sum_{i=1}^{n} w_i E[\tilde{R}_i] = \sum_{i=1}^{n} w_i R_{mi}$$

onde,
$R_{mi}$ é o retorno médio do ativo *i*
$R_{mc}$ é o retorno médio da carteira

Já para o cálculo do risco, Markowitz o definiu como sendo o desvio padrão da série de retornos. Assim temos:

(2)

$$s_c^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 s_i^2 + 2\sum_{i>j}^{n} w_i w_j \operatorname{cov}(R_i, R_j)$$

onde,

$s_c^2$ é o desvio padrão dos retornos da carteira
$s_i^2$ é o desvio padrão dos retornos do ativo *i*
*cov(Ri, Rj)* é a covariância entre os retornos dos ativos *i* e *j*

A partir das equações (1) e (2), quando se examina a relação risco *versus* retorno da carteira, admite-se a racionalidade do investidor. Dessa forma, deve-se procurar carteiras que, para um dado nível de retorno esperado, apresentem mínima variância ou ainda que para um dado nível de variância apresentem o máximo retorno. O investidor, dessa forma, seguirá “o princípio da dominância”. Para melhor se compreender este princípio, há três alternativas de investimento que podem ser vistas na figura 2. Pode se ver que o ativo A apresenta um maior retorno que B, para um mesmo nível de risco, logo, A domina sobre B (A é preferido a B). Da mesma forma, pode se ver que A apresenta um mesmo retorno que C, porém com maior risco. Assim, C domina sobre A (C é preferível a A). Assim, com a idéia de se buscar o máximo retorno para um dado nível de risco (ou um mínimo risco para um dado nível de retorno), agregada à existência do princípio da dominância, pode-se perceber que a partir das equações (1) e (2) acima deduzidas se aplicará o multiplicador de Lagrange, possibilitando achar uma equação que represente a “fronteira eficiente dos investimentos com risco”.

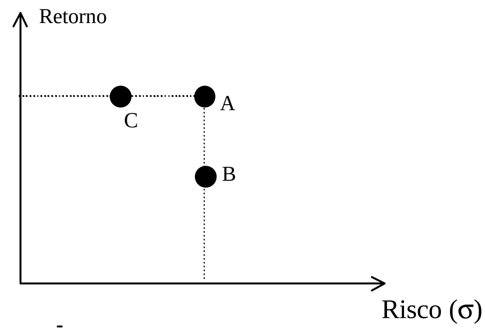


**Figura 2 - Princípio de Dominância**

O modelo de Markowitz esbarra num grande problema para a época em que fora desenvolvido: exige-se um grande número de cálculos de covariâncias além da necessidade de trabalhar com programação quadrática para poder se estimar o peso dos ativos que minimizam o risco da carteira para cada nível de retorno. Atualmente, com a evolução da tecnologia computacional, isto deixa de ser um grande problema, porém, para a época de seu desenvolvimento tornava-se bem mais difícil de se operacionalizar.

Dada a barreira de cunho prático do modelo, Sharpe[20] propõe um modelo de mais simples operacionalização. A idéia de Sharpe baseia-se na tentativa de se poder calcular o coeficiente de correlação linear dos retornos dos ativos em relação a um único ativo que atuaria como uma espécie de padrão para comparações. O ativo padrão passou a ser o que Sharpe chamou de “carteira de mercado”, sendo “a carteira formada por todos os ativos de risco da economia”. Segundo Sharpe, a carteira de mercado deveria atribuir pesos aos ativos de risco do mercado proporcionalmente a seus pesos na economia real (ao PIB do país).

O primeiro passo no desenvolvimento do modelo de Sharpe baseia-se na idéia de se fazer uma regressão linear entre os retornos de um ativo qualquer, e os retornos do mercado. Assume-se que os retornos dos ativos com o mercado estão correlacionados, sendo que cada ativo responde ao mercado com uma intensidade diferente. Assume-se que todos os ativos estão respondendo a esta única força comum a todos. A fórmula encontrada será:

(3) $$R_i = a + bR + e$$

Assim, $a$ e $b$ são os coeficientes resultantes da regressão, enquanto que $e$ é o termo de erro aleatório, sendo considerado um ruído branco (média zero e com um certo desvio padrão). O intercepto $a$ representa o retorno do ativo que independe do mercado, sendo assim o retorno próprio do ativo. O coeficiente angular $b$, também conhecido por fator beta, descreve a resposta do retorno do ativo a mudanças na taxa de retorno da carteira de mercado.

Calculando o retorno médio deste ativo, temos:

$$E[R_i] = E[a + bR_m + e]$$

Como $a$ e $b$ são constantes da regressão e $e$ é um ruído branco, temos:

(4) $$Rm_i = a + bRm_m$$

onde,

$Rm_i$ é o retorno médio do ativo i
$Rm_m$ é o retorno médio do mercado

Assim, para o cálculo da esperança dos retornos do ativo, o ruído branco desaparece. Calculando a variância do retorno do ativo $i$, teremos:

(5) $$\underbrace{s_i^2}_{\text{Risco Total}} = \underbrace{b^2 s_m^2}_{\text{Risco Sistemático}} + \underbrace{s^2(e)}_{\text{Risco Próprio}}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (5) é conhecido por risco sistemático, conjuntural ou não diversificável do investimento e representa a parcela da variância do retorno do ativo que não pode ser diversificada. Esta parte pode ser explicada quando um movimento do mercado é capaz de mover o retorno do ativo. Algumas fontes do risco não diversificável são:

- variações da taxa de juros (alteração do custo de oportunidade do capital);
- inflação;
- flutuações no mercado secundário de ações (capaz de alterar eventuais decisões empresariais).

A segunda parcela da variância do retorno do ativo, por sua vez, é conhecida como risco não sistemático, específico, não conjuntural, próprio, diversificável ou residual, e representa a parcela da variância que tende a desaparecer com a diversificação de ativos. Esta parcela explica as oscilações do retorno do ativo adicionais ou inferiores às esperadas devido às oscilações do mercado. Assim, a variação total do retorno de um ativo em parte pode ser explicada por variações ao longo da reta obtida pela equação da regressão (devido variações do mercado), e em parte por variações acima ou abaixo da reta (devido fenômenos ligados à empresa). Com relação aos riscos diversificáveis, abaixo segue algumas fontes possíveis:

- possibilidade de insolvência da empresa;
- competência administrativa da empresa;
- tecnologia da empresa (possibilidade de obsolescência).

A mesma expressão encontrada para ativos individuais pode ser derivada para carteiras. Considere uma carteira formada por $n$ ativos, cada um apresentando a participação $w_1$, $w_2$, ...., $w_n$, onde:

$$w_1 + w_2 + .... + w_n = 1$$

A partir das equações básicas do modelo de Markowitz (1) e (2), e substituindo o retorno do ativo pela equação (3) do modelo de Sharpe, temos:

$$(6) \quad R_{mc} = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i + R_{mm} \sum_{i=1}^{n} w_i b_i$$

É interessante e importante observar que o fator beta da carteira nada mais é do que a média ponderada dos fatores beta dos ativos. A equação do retorno médio da carteira no modelo de Sharpe segue a fórmula apresentada para o retorno médio dos ativos, sendo composta por uma parcela ligada ao retorno próprio da carteira e uma ligada ao retorno do mercado.

Com relação ao desvio padrão do retorno, temos:

$$(7) \quad \underbrace{s_c^2}_{\text{Risco Total}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 s^2(e_i)}_{\text{Risco Próprio}} + \underbrace{s_m^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} w_i w_j b_i b_j}_{\text{Risco Sistemático}}$$

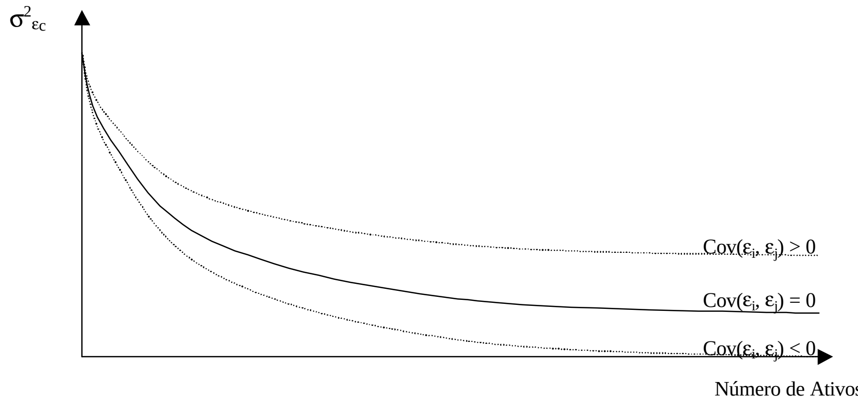


**Figura 3 - Risco Próprio *Versus* Número de Ativos na Carteira**

Obtém-se assim uma equação semelhante para a carteira e para os ativos individualmente, podendo se subdividir o risco da carteira em risco próprio e risco sistemático, da mesma forma que para os ativos em isolado. A grande vantagem desta equação com relação ao modelo de Markowitz é que para o cálculo das covariâncias passa-se a trabalhar com operadores lineares ao invés de quadráticos. Do ponto de vista prático, trabalhar com operador quadrático para a época em que o modelo de Markowitz fora desenvolvido tornava-se praticamente impossível. Assim, consegue-se com o modelo de Sharpe uma abordagem mais prática do ponto de vista operacional, embora este perca na precisão do resultado (por considerar as correlações entre os resíduos de diferentes ativos igual a zero).

Enfim, da mesma forma que o modelo de Markowitz, Sharpe também se propõe a calcular a fronteira eficiente dos ativos com risco a partir das equações (6) e (7). Assim, para cada nível de retorno, se buscará a composição $w_1$, $w_2$, ...,$w_n$ capaz de minimizar a variância do retorno da carteira. Para tal, usa-se o multiplicador de Lagrange. A equação final, assim como encontrada por Markowitz, resultará em uma hipérbole, que dará origem igualmente à Fronteira Eficiente.

Vale observar que o modelo assume que o erro aleatório do retorno de um ativo independe de outro ativo ou carteira, assim, as covariâncias entre os resíduos assumirem o valor *zero*. Devido esta hipótese, foi possível considerar a variância da carteira $s^2_{ec}$ como sendo a simples somatória das variâncias dos resíduos ponderadas por seus respectivos pesos ao quadrado $(Sw_i^2 s^2(e_i))$. Dada esta condição, a variância residual começa a desaparecer conforme o número de ativos da carteira aumenta. Por exemplo, considere uma carteira com um único ativo, onde o desvio padrão residual vale 10%. Agora, caso se passe a ter mais um ativo na carteira também com o desvio padrão residual de 10% e com o dinheiro alocado meio a meio entre os dois ativos, teremos:

$$s^2_{ec} = (0,50)^2 \text{ x } (0,10)^2 + (0,50)^2 \text{ x } (0,10)^2 = 0,5\%$$

$$s_{ec} = \sqrt{0,005} = 7,07\%$$

Como pode se ver, houve uma redução do risco próprio da carteira com o simples ingresso de mais um ativo com mesma variância residual. Dessa forma, pode se ver que quanto maior for o número de ativos presentes na carteira, distribuindo-se igualmente os pesos entre os ativos, menor tenderá a ser a variância residual. Fazendo-se um gráfico da variância residual com o número de ativos presentes na carteira, pode se ver que conforme se diversifica a carteira, a variância residual tende assintoticamente a zero (vide figura 3). Isto ocorre porque se assume que os resíduos não são correlacionados, e se alguns ativos apresentam retornos acima da linha característica do ativo, outros apresentam abaixo, de modo que há uma compensação entre os resíduos. Como o risco residual da carteira é o somatório dos pesos dos ativos ao quadrado multiplicados pelas respectivas variâncias dos resíduos, este sempre será pequeno se houver um número grande de ativos na carteira. A variância obtida pelo modelo de Sharpe passa a ser, desse modo, um número aproximado da variância real da carteira. Pode-se, no entanto, subestimá-la ou superestimá-la, como mostra a figura, por não se computar as covariâncias dos resíduos.

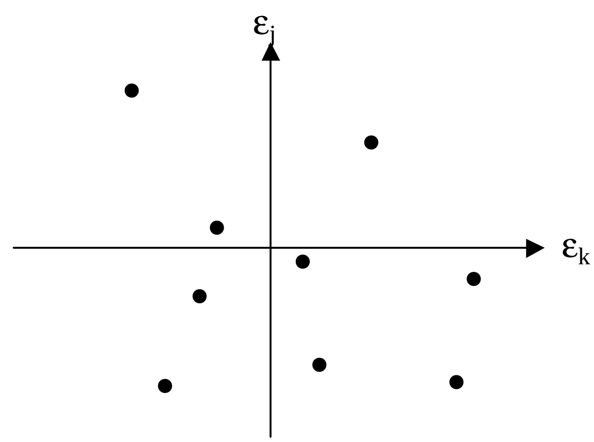


**Figura 4 - Dispersão dos Resíduos entre Diferentes Ativos**

Caso se quisesse computar os resíduos, poder-se-ia construir uma matriz de covariância conforme o Quadro I:

| $Cov(e_i, e_j)$ | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | $s^2(e_A)$ | $Cov(e_B, e_A)$ | $Cov(e_C, e_A)$ |
| B | $Cov(e_A, e_B)$ | $s^2(e_B)$ | $Cov(e_C, e_B)$ |
| C | $Cov(e_A, e_C)$ | $Cov(e_B, e_C)$ | $s^2(e_C)$ |

**Quadro I - Matriz de Covariância entre os Resíduos**

Portanto, temos que a variância do resíduo de uma carteira será :

$$s^2(e_c) = [w_i]\ [Cov(e_i, e_j)]\ [w_i]^T$$

Onde $[w_i]^T$ é a matriz transposta do vetor de pesos dos ativos na carteira.

A covariância entre os resíduos mede as oscilações dos retornos de ativos que possuem, por exemplo, algum tipo correlação com empresas de um mesmo setor industrial. Um exemplo da fragilidade desta hipótese assumida no modelo de Sharpe seria a covariância entre ativos do mesmo setor da economia, como telecomunicações e energia elétrica. Acredita-se *a priori*, do mesmo modo, que as ações do Índice Bovespa apresentem uma correlação entre os resíduos significativamente alta, podendo eventualmente conduzir a distorções na análise ao se utilizar o modelo de Sharpe. Dessa forma, o trabalho irá tentar medir esta imprecisão a partir dos ativos presentes no índice Bovespa.

Lintz e Renyi[12], em trabalho anterior, desenvolveram uma análise a partir do modelo de Sharpe para verificar o efeito de diversificação de carteiras compostas por ações pertencentes ao Ibovespa. Porém, consciente da importância de se analisar as covariâncias dos resíduos, este trabalho procurou realizar uma análise semelhante do efeito de diversificação de risco através do modelo de Markowitz, o qual considera em seus cálculos todos os elementos de risco que compõem a ação. Comparando-se os resultados obtidos por ambos os modelos, poder-se-á estimar se a covariância entre os resíduos é relevante, assim como analisar como este fator é capaz de levar a uma sobre ou subestimação do efeito de diversificação de carteiras de investimento.

## METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho se divide em três partes. A primeira irá tratar as condições básicas que permitiram o desenvolvimento do projeto, tais como o período de análise do estudo, a população que irá se analisar e tratamentos necessários nas séries de preços. A segunda parte consiste na simulação por computador de carteiras aleatórias. Nesta etapa ainda se calculará o ganho de diversificação de carteiras. A última parte, enfim, buscará comparar o resultado obtido com a diversificação obtida pelo modelo de Markowitz com o de Sharpe. Objetiva-se então medir o grau de precisão entre os dois modelos a partir de uma análise realizada com as ações mais líquidas do mercado brasileiro, assim como estimar como a covariância dos resíduos influi nesta análise.

### Universo e Período do Estudo

Escolheu-se trabalhar com um período de análise de um ano, a partir de uma série de preços diários. O trabalho procurou encerrar o estudo antes do mês de outubro de 1997, pois sabe-se que em períodos de *crash* de bolsa de valores o mercado mostra-se mais ilíquido, i.e., com várias ações não sendo negociadas. Isto poderia eventualmente viesar as correlações dos ativos, além de dificultar o trabalho por haver séries incompletas (com ausência de preços) em várias datas. O período assim escolhido inicia-se no dia 1º de setembro de 1996 indo até o dia 30 de agosto de 1997.

A população do estudo é das ações constantes no Índice Bovespa. Escolheu-se trabalhar com estas ações, por se tratar das ações mais líquidas da bolsa de São Paulo, o que asseguraria se estar estudando as ações com maior negociabilidade no mercado nacional. Dentro do período determinado, a composição teórica do índice alterou-se três vezes (a composição do índice é revisada a cada quatro meses). Incluiu-se assim no universo de análise qualquer ação que tivesse aparecido pelo menos uma vez no índice durante o ano de vigência do estudo. A única ação que esteve presente no índice tanto na carteira de setembro a dezembro de 1996, assim como na carteira de maio a agosto de 1997, e que não pôde ser incluída no estudo, foi a da Siderúrgica Riograndense PN (RIO4), pois a empresa fora incorporada ao Grupo Gerdau em 30/07/97, não permitindo que se tenha uma série histórica completa de seus preços para o período de análise. Vale apenas ressalvar que as ações da companhia Refripar (REP4) que estavam presentes no índice de setembro de 1996 a abril de 1997 passaram a ser consideradas pertencentes à Electrolux a partir de maio de 1997.

### Fonte dos Dados e Tratamento das Séries

Para poder se trabalhar com as séries, estas devem sempre ser ajustadas aos pagamentos de dividendos, subscrições, bonificações, assim como desdobramentos. Os dados foram obtidos através do serviço eletrônico Economática, que apresenta a opção de se obter os preços já ajustados a estes proventos, não necessitando assim corrigi-los.

Com relação às séries, ocasionalmente algum ativo poderia não apresentar negociação em alguma data, optando-se por interpolar os preços linearmente a partir dos dados anterior e posterior mais próximos para obter este valor caso isto ocorresse. Com este procedimento, deve se ater à possível subestimação dos valores obtidos. Contudo, como a série de dados é bem longa, e pelo fato desta ausência de negociação não se mostrar demasiadamente corriqueira para os ativos em estudo, acredita-se não estar se levando a um grande viés dos resultados.

## O Cálculo dos Retornos Diários

Para o cálculo do retorno diário, a série foi considerada com distribuição contínua (juros contínuos), tendo como base a seguinte fórmula:

$$P_t = P_0 e^{It},$$

onde,

$P_t$ é o preço no período t
$P_0$ é o preço no período inicial
$t$ é o número de períodos existentes (base diária)

logo:

$$I = \ln\left(\frac{P_t}{P_0}\right)^{1/t}$$

## A Carteira de Mercado

O estudo realizado por Lintz e Renyi(12) utilizou-se do modelo desenvolvido por Sharpe. Este modelo é integralmente baseado na presença de um índice capaz de representar o mercado. Para o Brasil, o índice mais conhecido no mercado acionário é o Ibovespa. Participam da carteira teórica do Ibovespa as ações de maior negociabilidade nos últimos 12 meses e que, em conjunto, representem pelo menos 80% da soma dos índices de negociabilidade apurados para todas as ações negociadas a vista nos pregões deste período na Bolsa de Valores de São Paulo. Adicionalmente, exige-se que cada ação selecionada por este critério tenha participado em pelo menos 80% dos pregões do período considerado e que seu volume de negócios no mercado a vista no período corresponda a mais do que 0,1% do volume total de negociações no mercado a vista da Bolsa de Valores de São Paulo no mesmo período.(11)

Assim, a negociabilidade é um conceito central na metodologia de construção do Índice Bovespa. Porém, devido a esta metodologia, atribui-se um peso muito grande para as ações da Telebrás, ocupando, como pode ser visto na composição que se utilizará como base, 44,733% do total com ações do tipo PN, e 5,345% com ações do tipo ON. Ou seja, aproximadamente 50% do índice pode ser representado por ações da empresa Telebrás.

Por outro lado, o modelo de Sharpe entende por carteira de mercado a combinação de todos os ativos com risco existentes, em proporções correspondentes aos seus valores de mercado. Neste sentido, a utilização do Índice Bovespa como representativo do mercado paulista ou brasileiro de ações sem dúvida é susceptível a críticas, pois questiona-se principalmente a grande concentração do índice em certas ações.

O modelo de Sharpe requer que se calcule a regressão linear entre todos os retornos dos ativos individualmente e os retornos do mercado, e tem como objetivo permitir obter os coeficientes angulares e resíduos da regressão, que serão utilizados no cálculo do risco das carteiras.

Para o retorno de cada ativo individualmente, calculou-se o risco total (definido como o desvio padrão da série dos retornos), assim como o risco sistemático e próprio.

## Construção das Carteiras Aleatórias

A metodologia utilizada para compor as diversas carteiras de ativos é baseada em simulação por computador. O programa desenvolvido gera aleatoriamente diferentes combinações de ativos para diversos tamanhos de carteira (de 1 a 50 ativos). Para cada tamanho de carteira, serão simuladas 1.000 combinações, sempre se distribuindo homogeneamente os pesos relativos. Assim, por exemplo, para uma carteira composta por 30 ações, cada ativo sorteado aleatoriamente apresentará um peso de 1/30 na carteira. Através desta metodologia, serão geradas no total 50.000 simulações, sendo este um número que permite maior confiabilidade das variáveis estudadas. Para cada grupo de 1.000 carteiras aleatórias de mesmo tamanho, serão calculados os estimadores média das variáveis risco sistemático, próprio e total pelo modelo de Markowitz. A partir destes dados serão realizadas as principais análises e conclusões.

O risco encontrado a partir do modelo de Sharpe, foi subdividido em Risco Próprio, Sistemático e Total, como pode ser visto no trabalho de Lintz e Renyi [12]. Porém, neste trabalho, utilizando-se o modelo de Markowitz, apenas se calculará o risco total das carteiras.

O passo seguinte consiste em calcular o risco total das carteiras dos mais diversos tamanhos a partir do modelo de Markowitz, permitindo medir a dimensão do possível erro que pode estar se incorrendo ao se utilizar o modelo de Sharpe como estimador de risco para as carteiras compostas por ações do mercado brasileiro.

### Teste de Significância para a Igualdade das Variâncias

A última etapa consiste em verificar a partir de quantos ativos o modelo de Sharpe passa a apresentar um erro de mensuração capaz de viesar a análise da variância das carteiras. Para se verificar esta igualdade, realiza-se o teste de significância para a igualdade das variâncias entre a esperança do estimador variância medido a partir do modelo de Sharpe e o medido a partir do modelo de Markowitz para as carteiras dos mais diversos tamanho, como segue abaixo:

$H_o$: $\sigma^2_{Markowitz} = \sigma^2_{Sharpe}$
$H_1$: $\sigma^2_{Markowitz} \neq \sigma^2_{Sharpe}$

O teste é realizado ao nível de significância de 10%.

### Critério de Decisão de Diversificação Ótima das Carteiras

O critério para decisão do número ótimo de ativos capaz de diversificar uma carteira será através da análise de convergência do estimador média referente ao risco total. Esta convergência será atingida quando o decréscimo do risco total da carteira for inferior a um valor arbitrário de 0,01%. Objetiva-se então comparar com quantos ativos se conseguirá obter convergência pelo modelo de Markowitz em comparação ao modelo de Sharpe, com o intuito de analisar possíveis erros nas tomadas de decisões com base no último.

## ANÁLISE DOS RESULTADOS

A partir dos resultados obtidos com as 50.000 carteiras simuladas pelo modelo de Markowitz, construiu-se o gráfico disposto na figura 5, que representa o comportamento do risco total em função do número de ativos que compõem a carteira.

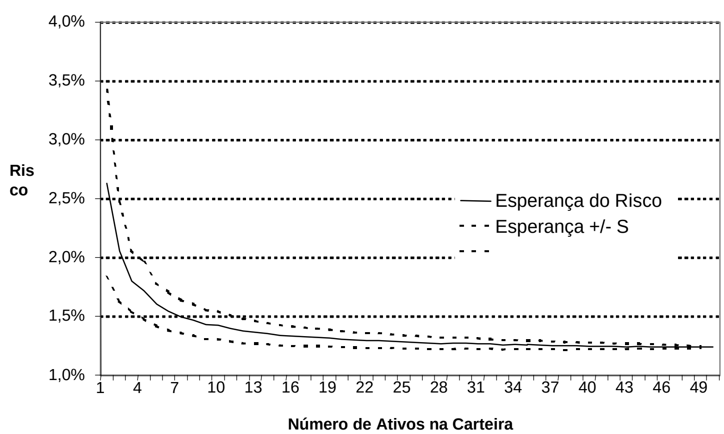


**Figura 5 - Diversificação de Risco pelo Modelo de Markowitz**

Percebe-se que o risco total das carteiras tende assintoticamente a um certo patamar definido pelo risco não diversificável. O risco total médio das carteiras simuladas foi de 2,63% para 1 ativo, decrescendo rapidamente para 1,54% para 6 ativos, 1,40% para 11 ativos até atingir 1,24% para 50 ativos. Pelo critério adotado (variação do risco menor ou igual a 0,01% para incrementos unitários do tamanho da carteira), atingiu-se a convergência do risco com 13 ativos, ou seja, a partir deste ponto os ganhos de diversificação tornaram-se inferiores a 0,01% de decréscimo do risco total da carteira.

Comparando estes resultados com os obtidos no estudo de Lintz e Renyi[12], pode se ver que há uma margem de erro considerável ao se analisar diversificação de ativos em carteiras de investimento através da metodologia de Sharpe. Neste estudo, obteve-se a convergência apenas trabalhando com 11 ativos, enquanto que a convergência real ocorreu com 13 pelo critério adotado.

Através da Figura 6, é possível se comparar a diversificação de carteiras através do modelo de Sharpe em comparação ao de Markowitz. Como pôde ser visto, detectou-se uma correlação residual entre os diferentes ativos analisados, pois o risco estimado se comporta de maneira diferente a partir de cada modelo utilizado.Dado que o risco calculado pelo modelo de Sharpe é uma simplificação do modelo de Markowitz, e como o primeiro não leva em consideração a análise das covariâncias residuais entre diferentes ativos, conclui-se que as mesmas são positivas (vide Figura 3).

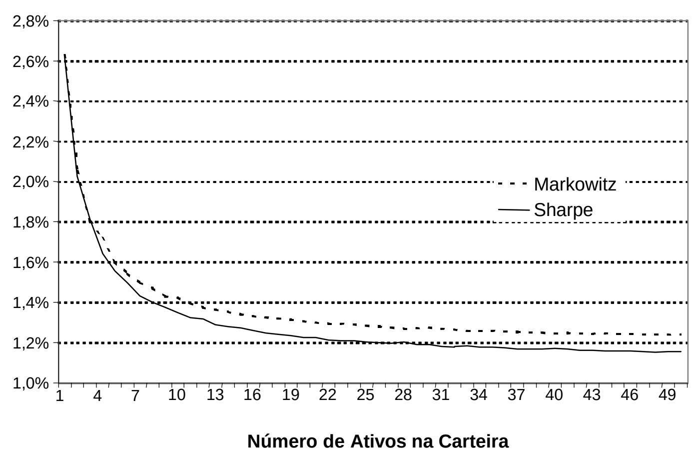


**Figura 6 - Diversificação de Risco pelos Modelos de Markowitz e Sharpe**

Fazendo-se o teste de hipótese de igualdade das variâncias, chega-se à conclusão que para carteiras formadas por mais de 15 ativos pode se rejeitar a hipótese nula, ou seja, as variâncias calculadas pelos diferentes modelos tornam-se estatisticamente discrepantes. Por exemplo, com carteiras de 16 ativos, o desvio padrão dos retornos pelo modelo de Markowitz foi de 1,33%, enquanto que de Sharpe foi de 1,26%. Este resultado prova a existência de correlação residual predominantemente positiva entre os diferentes ativos presentes nas carteiras. Portanto, a utilização do modelo de Sharpe para o cálculo de risco das carteiras brasileiras apresenta um viés significativo.

Para melhor se perceber a dimensão do erro que o modelo de Sharpe nos levou, calculou-se um percentual de erro da análise (PEA), que pode ser dado por:

$$PEA = \frac{\left| s_S^2 - s_M^2 \right|}{s_M^2}$$

onde,

$s_M{}^2$ é a variância obtida pelo modelo de Markowitz
$s_S{}^2$ é a variância obtida pelo modelo de Sharpe

Para carteiras formadas por 16 ativos, temos o percentual de erro da análise de:

$$PEA = \frac{\left|(1{,}25\%)^2 - (1{,}32\%)^2\right|}{(1{,}32\%)^2} = 10{,}32\%$$

Como pode se ver, houve uma imprecisão de 10,32% na estimação do risco pelo modelo de Sharpe. Este erro vai se tornando muito mais forte a medida que se aumenta o número de ativos. Fazendo-se o mesmo cálculo então para a carteira formada por todos os 50 ativos, temos:

$$PEA = \frac{\left|(1{,}15\%)^2 - (1{,}24\%)^2\right|}{(1{,}24\%)^2} = 13{,}99\%$$

Assim, obteve-se um erro de estimação do risco da ordem de 14%, para as carteiras de 50 ativos.

Vale observar que enquanto o modelo de Markowitz mostra-se mais preciso para a estimação do risco total, este, por outro lado, não permite que se consiga decompor o risco em diversificável e não diversificável, como no modelo de Sharpe. Assim, ganha-se em precisão de resultado, mas perde-se em praticidade da análise. Portanto, a análise a partir do modelo de Sharpe se tornaria completa caso se alterasse a hipótese de covariância nula entre os resíduos das regressões, e se fosse utilizada uma matriz de covariância de resíduos no cálculo do modelo.

## CONCLUSÃO

Este estudo teve como principal objetivo comparar o resultado encontrado pelo modelo de Sharpe para carteiras dos mais variados tamanhos obtido em estudo anterior por Lintz e Renyi[12], com o risco obtido pelo modelo de Markowitz. Buscou-se discutir as possíveis distorções na mensuração do risco através do modelo de Sharpe, decorrente de duas de suas simplificações:

1. O modelo de Sharpe baseia-se na carteira de mercado para se calcular as variâncias e covariâncias entre todos os ativos. Contudo, caso a carteira utilizada não seja uma boa *proxi* do mercado, não se obterá um número preciso para as covariâncias entre os ativos;
2. O calculo da variância pelo modelo de Sharpe parte do pressuposto de que não há covariância residual entre os retornos de diferentes ativos, o que pode levar a uma imprecisão nos resultados obtidos por este modelo.

O trabalho não visou analisar a primeira premissa exposta. Dessa forma, a crítica feita ao modelo de Sharpe restringiu-se à análise das covariâncias residuais dos retornos dos diferentes ativos presentes no índice.

O resultado obtido aponta para uma imprecisão do modelo, chegando-se à magnitude de aproximadamente 14% de diferença na análise entre os dois métodos em carteiras compostas por todos os 50 ativos.

Realizando-se um teste de hipótese para a igualdade de variâncias, pôde ainda se detectar que a partir de 15 ativos há uma diferença estatisticamente significante entre as variâncias calculadas através dos dois modelos.

Com relação aos ganhos de diversificação, conforme estudos de Lintz e Renyi, o modelo de Sharpe indicava que a partir de 11 ativos havia uma convergência do risco total a um nível de variação inferior a 0,01%. Por outro lado, o modelo de Markowitz indicou uma convergência do risco total apenas quando se trabalha com 13 ativos, seguindo o mesmo critério.

Dessa forma, o trabalho desenvolvido possibilitou medir o tamanho da distorção incorrida ao se trabalhar com os diferentes modelos para as ações de maior negociabilidade da Bolsa de São Paulo. Pode se dizer que o modelo de Markowitz permite calcular precisamente o verdadeiro risco de uma carteira, sendo este o número ideal para análise de uma carteira. Contudo, dada a complexidade de cálculo deste, o modelo simplificado de Sharpe é muito utilizado ainda nos dias atuais. Medir as distorções desta medida para os ativos brasileiros mostra-se fundamental, como o trabalho aqui presente indicou.

Por fim, o presente estudo pode ainda ser considerado um esboço de um trabalho que pode vir a ser aprofundado posteriormente, valendo-se de discussões e indagações a respeito, dado seu caráter inovador. Mas, sem dúvida, sua utilidade é inegável, buscando-se mensurar as falhas de um modelo muito utilizado na maior parte das instituições financeiras, assim como em inúmeros trabalhos de pesquisa contemporâneos.

## BIBLIOGRAFIA


**BODIE**, A., **KANE**, A. e Marcus, A.J. *Investments*, Irwin, 3ª ed., 1996. (1)

**BRITO**, N. R. O. - "*O efeito diversificação de risco no mercado acionário brasileiro*", In: Gestão de Investimentos, Atlas, 1989, pp. 81-104 (2)

**CHEN**, N. F.; R. **ROSS**; and S. Ross, - "*Economic Forces and the Stock Market*." Journal of Business, 59 (July 1986), pp.383-403. (3)

**COPERLAND**, T. E. e **WESTON**, J. F. - *Financial theory and corporate policy*, 3ª ed., Addison Weley Publishing Company, EUA, 1988. (4)

**EID**, Willian Jr., "*A Redução do Risco das Carteiras de Investimento através da Diversificação Aleatória - Estudo de Caso na Bovespa*", Dissertação de Mestrado, FGV/SP, 1991. (5)

**EVANS**, J. & **ARCHER**, S. H. – "*Diversification and the Reduction of Dispersion: an Empirical Analysis*", Journal of Finance, vol. 23, 1968, pp .760-767 (6)

**FONSECA**, J. S. , Martins, G. A. & Toledo, G. L. – *Estatística Aplicada*. São Paulo, Atlas, 1985 (7)

**FRANCIS**, J. C. - *Investments: Analysis and Management*, 4th edition, NY, McGraw Hill, 1986. (8)

**HAUGEN**, Robert A. - *Modern Investment Theory*. 4ª ed, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1997, pp. 152-280. (9)

**KNIGHT**, F. - *Capital*, *Time and Interest Rate.* Economica, 1932, pp.257-286. (10)

**LEITE**, H. de Paula e **SANVICENTE**, A.Z. - *Índice Bovespa: Um Padrão para os Investimentos Brasileiros*. São Paulo, Atlas, 1995. (11)

**LINTZ**, A. e **RENYI**, L., - "*Análise de Diversificação de Carteiras Compostas por Ações Pertencentes ao Índice Bovespa: Uma Análise a partir do Modelo de Sharpe*", Caderno de Pesquisas em Administração, São Paulo, vol.1, nº 7, 2º Trim../98 (12)

**MARKOWITZ**, Harry M. – "*Potfolio Selection*", Journal of Finance, v.7, mar/1952, pp. 77-91. (13)

**MORAES** Jr, J. Q. – "*Market Performance of the São Paulo Stock Exchange*". Ph.D. Dissertation, Michigan State University, 1981. (14)

**REILLY**, F.K. - *Investments Analysis and Portfolio Management*, 2nded., CA, Dryden press, 1985, pp.101 (15)

**ROSS**, S. - "*The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*", Journal of Economic Theory, 13 (Dec. 1976), pp.341-360. (16)

**SANVICENTE**, A. Z. e Mellagi Filho, A. - *Mercado de Capitais e estratégias de investimento*. São Paulo, Atlas, 1988 (17)

**SECURATO**, J. R. - *Decisões Financeiras em Condições de Risco*, Editora Atlas S.A., São Paulo, 1996, pp. 191-240. (18)

**SHARPE**, W. F. & Alexander, J.A. – *Investments*, 4th ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990, pp .140. (19)

**SHARPE**, W. F. – "*Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk*", The Journal of Finance, vol. 19, set. 1964, pp. 425-42. (20)

**SHARPE**, W. F. – "*Diversification and Portfolio Risk*", Financial and Analyst Journal, nov/dez 1972, pp 30-59 (21)

**SOLNIK**, B. – "*Why not Diversify Internationally*", Financial Analyst Journal, July 1974, pp. 48-54. (22)

**TOBIN**, J. - "*Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*", Review of Economics Studies, 02/1958, pp. 65-86. (23)

**WAGNER**, W.H. & **LAU**, S. C. – "*The Effect of Diversification on Risk*", Financial Analysis Journal, Nov/Dec 1971, pp. 48-53 (24)