

---

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS SUJEITAS A RESTRIÇÕES  
DE VARIÂNCIA DO TRACKING ERROR****AUTORES****LETICIA LANCIA NORONHA BELLATO**Universidade de São Paulo  
let.bell@terra.com.br**EDUARDO VIEIRA DOS SANTOS PAIVA**FEA - Administração  
eduardo.paiva@bcb.gov.br**JOSÉ ROBERTO SECURATO**Universidade de São Paulo  
securato@usp.br**RESUMO**

Este artigo explora a relação risco e retorno de carteiras com gestão ativa sujeitas a uma restrição de volatilidade do *tracking error*. A prática comum no setor de administração de investimentos é controlar o risco dos administradores de carteiras com gestão ativa pela imposição de restrição no *tracking error*. Essa abordagem, no entanto, é seriamente ineficiente, pois, quando miopeamente se foca nos retornos em excesso, o administrador de carteiras com gestão ativa ignora o risco total da carteira. Como resultado, a otimização dos retornos em excesso que incluem os ativos da carteira de mercado irá sempre aumentar o risco total da carteira em relação à carteira de mercado, o que resulta em carteiras seriamente ineficientes a não ser que restrições adicionais sejam impostas. No estudo é investigado como esse problema de agência pode ser corrigido com restrições adicionais à carteira sem eliminar a usual restrição de TEV. A adição de uma restrição adicional na volatilidade total da carteira mostrou uma melhoria na performance da carteira com gestão ativa. Tal otimização foi aplicada ao mercado de ações brasileiro utilizando como índices de mercado o Ibovespa e o IBrX-50.

**ABSTRACT**

This paper explores the risk and return relationship of active portfolios subject to a constraint on tracking-error volatility. The common practice in the investment management industry is to control risk of active managers by imposing a constraint on tracking error. This setup, however, is seriously inefficient. When myopically focusing on excess returns, the active manager ignores the total risk of the portfolio. As a result, optimization of excess returns that includes the benchmark assets will always increase total portfolio risk relative to the benchmark, which results in seriously inefficient portfolios unless some additional constraints are imposed. In this article, is investigated whether this agency problem can be mitigated with additional restrictions on the

active portfolio without eliminating the usual TEV constraint. Adding a constraint on total portfolio volatility can substantially improve the performance of the active portfolio. Such a constrained portfolio is the typical setup for active managers who are given the task of beating the benchmark. The problem with this setup is that the portfolio manager does not pay attention to total portfolio risk, which results in seriously inefficient portfolios unless some additional constraints are imposed. This optimization was applied to the Brazilian stock market using as benchmarks Ibovespa and IBrX-50.

***Palavras-chave:*** otimização de carteiras, *tracking error*, investimentos.

# OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS SUJEITAS A RESTRIÇÕES DE VARIÂNCIA DO TRACKING ERROR

## 1. Introdução

Quando um investidor delega a gestão de seus ativos para um administrador de carteiras a ele é, muitas vezes, dada a tarefa de superar o índice de mercado. Taxas de performance incentivam o gestor a tomar mais risco no intuito de aumentar o valor de sua opção. Para controlar esse comportamento, investidores institucionais comumente impõem limites à volatilidade do desvio da carteira com gestão ativa em relação à carteira de mercado, que é também denominada *tracking error volatility* (TEV).

Baixa volatilidade do *tracking error* parece um objetivo lógico para os investidores por ao menos duas razões. Primeiro, uma carteira com gestão ativa idealmente deve superar o índice de mercado todos os meses por uma quantia fixa líquida de custos e taxas. Isso implica uma volatilidade do *tracking error* de zero. Isso é ideal porque o investidor pode se certificar com completa segurança que o administrador está adicionando valor em relação a um fundo indexado alternativo. Segundo, os executivos encarregados de investimentos para administradoras de fundos, são eles mesmos monitorados anualmente no sentido de se verificar quão bem os administradores desempenharam e, em caso de performance ruim, o executivo é questionado no sentido de trocar o administrador da carteira.

Assim, a prática profissional corrente de investimentos segue uma abordagem de duas dimensões quanto à performance. Superar o índice de mercado na média é equivalente a ter um *tracking error* esperado positivo. Reduzir a volatilidade do *tracking error* significa minimizar a variância da diferença entre os retornos da carteira administrada e os retornos da carteira de mercado.

Essa é uma análise de média variância, mas, ao invés de encontrar a carteira com menor volatilidade do retorno total para um dado retorno total, a carteira eficiente de Markowitz (1952, 1959), os administradores são obrigados a identificar a carteira com mínima variância do *tracking error* para uma dada performance esperada em relação à carteira de mercado. Roll (1992) chama de *TEV Criterion* a minimização da variância do *tracking error* para um dado *tracking error* esperado.

Roll (1992) mostra que um administrador que persegue com sucesso o *TEV Criterion* irá intencionalmente não produzir uma carteira eficiente no espaço média-variância sob maior parte das circunstâncias. Mesmo com perfeita informação sobre o retorno esperado, o administrador irá selecionar carteiras dominadas por outras carteiras com maiores retornos esperados e menores volatilidades apesar de não menores volatilidades do *tracking error*. Enfim, notou que a otimização do espaço de retornos em excesso leva ao indesejado resultado de que a carteira com estão ativa terá maior risco que a carteira de mercado e não será ótima.

Jorion (2002) examinou uma amostra de fundos indexados com gestão ativa que utilizavam otimização de retornos em excesso e descobriu que tais fundos tinham sistematicamente mais risco que a carteira de mercado.

Devido ao setor continuar a enfatizar restrições de *tracking error*, Jorion (2003) propõe uma restrição adicional que pode mitigar a ineficiência do uso de restrições de *tracking error*. Uma restrição que o autor apresenta seria a de forçar a que a volatilidade total da carteira não fosse maior que a da carteira de mercado. Jorion (2003) mostrou como a adição dessa restrição adicional pode melhorar substancialmente a performance da carteira com gestão ativa. Além

disso, concluiu que, quanto menor a volatilidade do *tracking error*, maiores os benefícios da restrição adicional e que, quanto menos eficiente for o índice de mercado, melhor será a restrição sobre o risco total.

Jorion (2003) mostrou que as carteiras com restrições de volatilidade do *tracking error* são descritas por uma elipse no espaço média-variância. Essa descoberta possibilitou, devido à forma plana da elipse, uma melhoria substancial da performance da carteira com gestão ativa pela adição de uma restrição na volatilidade total da carteira.

## 2. Desenvolvimento do Modelo

Considere que ao administrador de carteiras é dada a tarefa de bater um índice ou *benchmark*. Para atingir este objetivo, o administrador deve tomar posições nos ativos em relação ao índice e, talvez, outros ativos. O administrador seguirá tal tarefa como se segue. As variáveis a serem consideradas são:

- $q_C = q + x$  : vetor de pesos da carteira;
- $q$  : vetor dos pesos do índice de mercado;
- $x$  : vetor dos desvios do índice de mercado;
- $E$  : vetor dos retornos esperados;
- $V$  : matriz de variância-covariância.

É assumido que são permitidas vendas a descoberto, ou seja, os pesos da carteira com gestão ativa  $q_i + x_i$  podem ser negativos para qualquer ativo  $i$ .

Geralmente o *benchmark* pode ter pesos negativos ou zero nos ativos. Portanto, o universo de ativos pode exceder o do índice. Essa otimização, no entanto, deve incluir os ativos do *benchmark*.

Os retornos esperados e as variâncias agora podem ser escritos em notação de matrizes:

- $\mu_M = q'E$  : retorno esperado do índice de mercado;
- $\sigma_M^2 = q'Vq$  : variância dos retornos do índice de mercado;
- $\mu_E = x'E$  : retorno esperado em excesso;
- $\sigma_E^2 = T = x'Vx$  : variância do *tracking error*.

O retorno esperado e a variância da carteira com gestão ativa:

$$\mu_C = (q + x)'E = \mu_M + \mu_E \quad (1)$$

$$\sigma_C^2 = (q + x)'V(q + x) = \sigma_M^2 + 2q'Vx + x'Vx \quad (2)$$

O problema de investimento é sujeito à restrição de que o total dos pesos da carteira deve somar 1,  $(q + x) = 1$ . Essa restrição também pode ser escrita como  $(q + x)' \mathbf{1} = 1$ , sendo que o  $\mathbf{1}$  representa um vetor de valores 1. Como os pesos da carteira de mercado também devem somar 1, os desvios da carteira de mercado devem somar 0, o que implica que  $x' \mathbf{1} = 0$ .

Assim, considerando o problema de otimização no espaço de retornos em excesso, pode-se traçar de *tracking error* pela maximização dos retornos esperados em excesso,  $\mu_E = x'E$ , sujeito a uma quantia fixa de volatilidade do *tracking error*,  $T = x'Vx$ , e que a soma dos pesos dos desvios em relação ao índice some zero,  $x' \mathbf{1} = 0$ .

Jorion (2003) propõe uma restrição adicional que force que a variância total dos retornos da carteira seja igual a um valor fixo  $\sigma_C^2$ :

$$(q + x)'V(q + x) = \sigma_C^2 \quad (3)$$

Assim o investidor poderia especificar que o risco total da carteira fosse igual ao do próprio índice de mercado,  $\sigma_C^2 = \sigma_M^2$ . Da equação (3), a restrição implica que  $2q'Vx = -T$ .

### 3. Problema de Pesquisa e Objetivo

O objetivo do artigo é aplicar tanto a otimização com restrições de volatilidade do *tracking error* tradicional quanto a otimização com a restrição adicional sugerida por Jorion (2003) ao mercado de capitais brasileiro a fim de verificar os possíveis benefícios da adição da restrição adicional a carteiras que têm como *benchmark* índices de mercado como os índices Ibovespa e IBrX-50. Espera-se também encontrar algum indício da eficiência comparativa entre tais índices com base na suposição de Jorion (2003) de que quanto menos eficiente o índice de mercado, mais benéfica a restrição adicional de controle de risco.

### 4. Aspectos Metodológicos

Para se avaliar o impacto da utilização do *tracking error* para a composição das carteiras, foram utilizados três índices divulgados pela Bovespa - Bolsa de Valores de São Paulo, o Índice Bovespa (Ibovespa) e o Índice Brasil 50 (IBrX-50). Os índices da Bovespa têm suas metodologias publicadas e seguem critérios de inclusão na carteira teórica baseados em negociabilidade. São também ajustados por ocasião de distribuição de proventos, com base no critério reinvestimento para manutenção do valor patrimonial da inversão inicial, sem retiradas ou aplicações adicionais.

O que diferencia os dois índices é o critério de formação da carteira teórica e a ponderação de cada ação na formação do índice. No caso do Ibovespa, o critério é a negociabilidade: "A participação de cada ação na carteira tem relação direta com a representatividade desse título no mercado à vista – em termos de número de negócios e volume financeiro." (Bovespa, 2005a). O IBrX-50, que inclui as 50 ações mais líquidas negociadas na Bovespa, também segue critérios de negociabilidade para a inclusão na carteira, porém a ponderação leva em conta o tamanho do patrimônio da empresa, a partir do "respectivo valor de mercado (no tipo pertencente à carteira) de suas ações disponíveis para negociação (*free float*), ou seja, serão excluídas as ações de propriedade do controlador." (Bovespa, 2005b). Nos dois casos, mais de uma ação de uma empresa podem participar da carteira teórica.

Foi construída uma amostra de cada índice, com base na carteira teórica vigente para o quadrimestre maio a agosto de 2005, selecionando-se as três ações com maior peso no Ibovespa. A participação relativa foi rebalanceada com base nas ações que compuseram a amostra. Na Tabela 1 é mostrada a redução no número de ações dos índices e a taxa de corte em cada um deles.

**Tabela 1 - Amostra de Estudo**

Código	Ação Empresa	Tipo	Ibovespa		IBrX-50	
			Participação no Índice	Participação Rebalanceada	Participação no Índice	Participação Rebalanceada
TNLP4	TELEMAR	PN	10,59%	42,90%	3,33%	13,52%
PETR4	PETROBRAS	PN	8,30%	33,63%	12,81%	52,06%
VALE5	VALE R DOCE	PNA	5,79%	23,47%	8,47%	34,42%
total			24,68%	100,00%	24,61%	100,00%

As séries foram obtidas a partir do sistema Economática, disponível no Labfin - Laboratório de Finanças da FIA-USP. O retorno esperado tanto dos índices de ações quanto das ações, bem como as variâncias dos retornos e matriz de covariância foram calculadas tendo por base a série histórica do retorno diário dos índices e das ações, no período de 1.9.04 a 31.12.04. Aplicou-se a metodologia do RiskMetrics (1996), onde os valores esperados são estimados a partir da média móvel ponderada exponencialmente (EWMA), com fator de decaimento  $\lambda$  de 94%. A média móvel foi calculada considerando-se todo o quadrimestre. As otimizações foram desenvolvidas no *software* Excel.

## 5. Análise dos Resultados

Foram desenvolvidas otimizações para TEV's anuais de 1% a 5% e os resultados obtidos nas otimizações, tanto sem restrição na variância total da carteira, quanto com restrição, para cada *benchmark* utilizado, estão resumidos nas Tabelas 2 e 3.

**Tabela 2 - Otimização com restrição de TEV de 5% com o Ibovespa como benchmark**

Ações	Retorno Diário Esperado (E)	Pesos do índice ajustado (q)	Otimização sem restrição na variância total da carteira		Otimização com restrição na variância total da carteira	
			x	q+x	x	q+x
PETR4	0,2623%	33,6%	-89,8%	-56,2%	-90,1%	-56,5%
TNLP4	0,3266%	42,9%	-9,6%	33,3%	-9,2%	33,7%
VALE5	0,4371%	23,5%	99,4%	122,9%	99,4%	122,8%
Peso Total		100%	0%	100%	0%	100%

Carteira	Total	Excesso	Total	Excesso	Total
Retorno Esperado	0,341%	0,404%	0,745%	0,404%	0,745%
Variância	0,000058	0,000199	0,000107	0,000199	0,000107

**Tabela 3 - Otimização com restrição de TEV de 5% com o IBrX50 como benchmark**

Ações	Retorno Diário	Pesos do índice ajustado (q)	Otimização sem restrição na variância total da carteira		Otimização com restrição na variância total da carteira	
	Esperado (E)		x	q+x	x	q+x
PETR4	0,2623%	52,1%	-90,1%	-38,1%	-92,8%	-40,7%
TNLP4	0,3266%	13,5%	-9,2%	4,3%	-5,3%	8,2%
VALE5	0,4371%	34,4%	99,4%	133,8%	98,1%	132,5%
Peso Total		100%	0%	100%	0%	100%

Carteira	Total	Excesso	Total	Excesso	Total
Retorno Esperado	0,356%	0,404%	0,760%	0,403%	0,759%
Variância	0,000120	0,000199	0,000128	0,000198	0,000120

Foram encontrados os desvios em relação aos pesos das ações das carteiras de mercado em questão que iriam compor para chegar aos pesos da carteira com gestão ativa. A Tabela 2 indica que o retorno diário da carteira com restrição de variância do *tracking error* é de 0,745% enquanto o Ibovespa tem um retorno esperado de 0,341% ao dia. Acompanhando o crescimento do retorno esperado, observamos o aumento da variância dos retornos, que no índice é de 0,000058 e na carteira com gestão ativa é de 0,000107. Também não se observa diferença nos resultados das carteiras com a inclusão da restrição na variância total no processo de otimização.

Com relação ao *benchmark* IBrX-50, observamos também um incremento no risco total da carteira ativa (de 0,000120 para 0,000128), acompanhando o crescimento do retorno (de 0,356% para 0,760%). Ao se incluir a restrição na variância total da carteira, observamos a manutenção do retorno total, porém acompanhado de uma redução no risco total, conforme descrito por Jorion (2003).

Os resultados das otimizações realizadas considerando cada um dos três índices de mercado a restrições de 0,5% a 5,0% de variância do *tracking error*, realizadas de 0,5 em 0,5% foram resumidos nas Tabelas 4 e 5.

**Tabela 4 - Otimização com restrições de tracking error com o Ibovespa como benchmark**

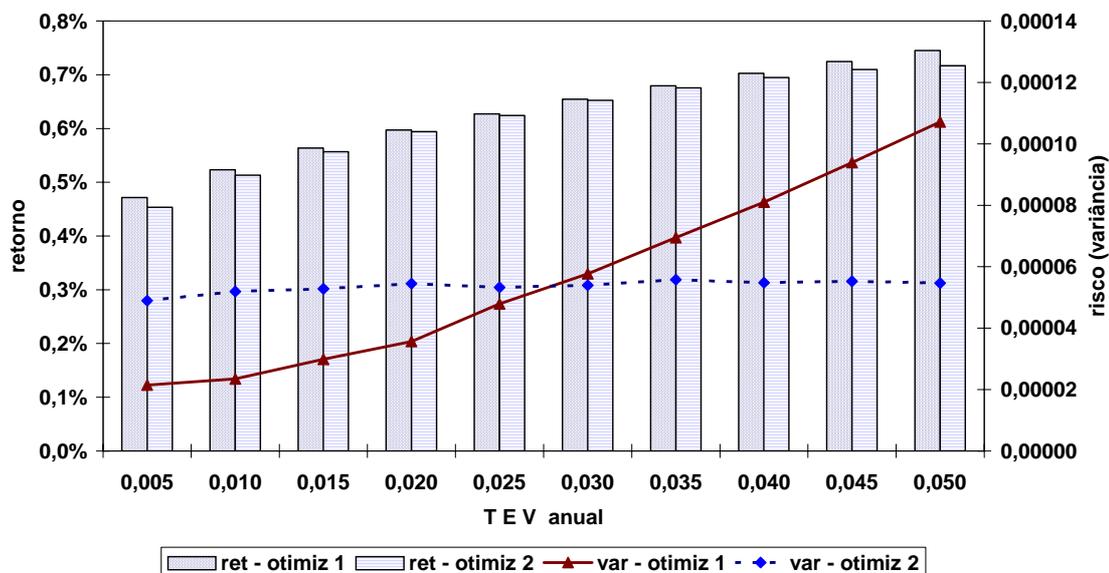
Tracking Error Anual (Variância) (T)	Retorno Esperado Diário do Índice	Variância dos Retornos do Índice	Otimização sem restrição na variância total da carteira		Otimização com restrição na variância total da carteira	
			Retorno Esperado (x+q)E	Variância (q+x)V(q+x)	Retorno Esperado (x+q)E	Variância (q+x)V(q+x)
0,005	0,341%	0,000058	0,4715%	0,000021	0,4534%	0,000049
0,010	0,341%	0,000058	0,5234%	0,000023	0,5130%	0,000052
0,015	0,341%	0,000058	0,5636%	0,000030	0,5566%	0,000053
0,020	0,341%	0,000058	0,5974%	0,000036	0,5945%	0,000054
0,025	0,341%	0,000058	0,6274%	0,000048	0,6242%	0,000053
0,030	0,341%	0,000058	0,6545%	0,000058	0,6522%	0,000054
0,035	0,341%	0,000058	0,6795%	0,000069	0,6756%	0,000056
0,040	0,341%	0,000058	0,7027%	0,000081	0,6950%	0,000055
0,045	0,341%	0,000058	0,7245%	0,000094	0,7096%	0,000055
0,050	0,341%	0,000058	0,7452%	0,000107	0,7171%	0,000055

**Tabela 5 - Otimização com restrições de *tracking error* com o IBrX-50 como *benchmark***

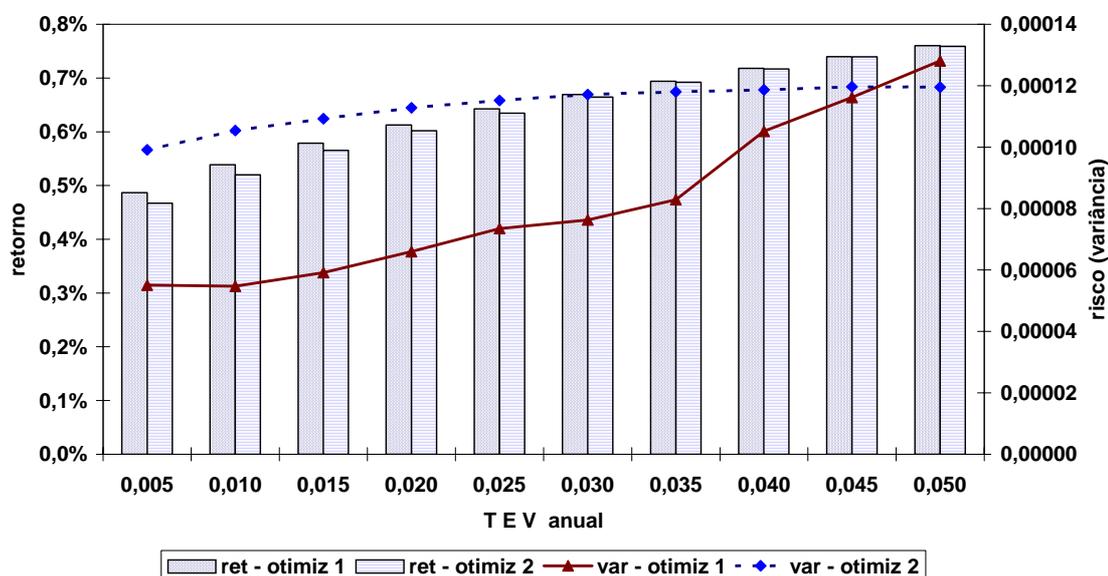
<i>Tracking Error</i> Anual (Variância) (T)	Retorno Esperado Diário do Índice	Variância dos Retornos do Índice	Otimização sem restrição na variância total da carteira		Otimização com restrição na variância total da carteira	
			Retorno Esperado (x+q)E	Variância (q+x)'V(q+x)	Retorno Esperado (x+q)E	Variância (q+x)'V(q+x)
0,005	0,356%	0,000120	0,4867%	0,000055	0,4670%	0,000099
0,010	0,356%	0,000120	0,5386%	0,000055	0,5200%	0,000105
0,015	0,356%	0,000120	0,5787%	0,000059	0,5653%	0,000109
0,020	0,356%	0,000120	0,6127%	0,000066	0,6021%	0,000113
0,025	0,356%	0,000120	0,6426%	0,000074	0,6347%	0,000115
0,030	0,356%	0,000120	0,6694%	0,000076	0,6647%	0,000117
0,035	0,356%	0,000120	0,6941%	0,000083	0,6922%	0,000118
0,040	0,356%	0,000120	0,7179%	0,000105	0,7171%	0,000119
0,045	0,356%	0,000120	0,7397%	0,000116	0,7394%	0,000120
0,050	0,356%	0,000120	0,7603%	0,000128	0,7591%	0,000120

As Tabelas 4 e 5 mostram que, para TEV's baixos (menores que 0,02) a inclusão da restrição na variância total da carteira aumenta o risco total, sem proporcionar aumento retorno total. O efeito de aumento de eficiência com a adição dessa restrição se observa a partir de TEV 0,03 para o Ibovespa e de 0,05 para o IBrX-50 . Basicamente o que se observa é uma manutenção do retorno total. Com a restrição de a variância total ser igual à variância do *benchmark*, essa é praticamente constante para os diversos TEV's, conforme ilustrado nos gráficos abaixo.

**Gráfico 1 - Risco e retorno por processo de otimização - *benchmark*: Ibovespa**

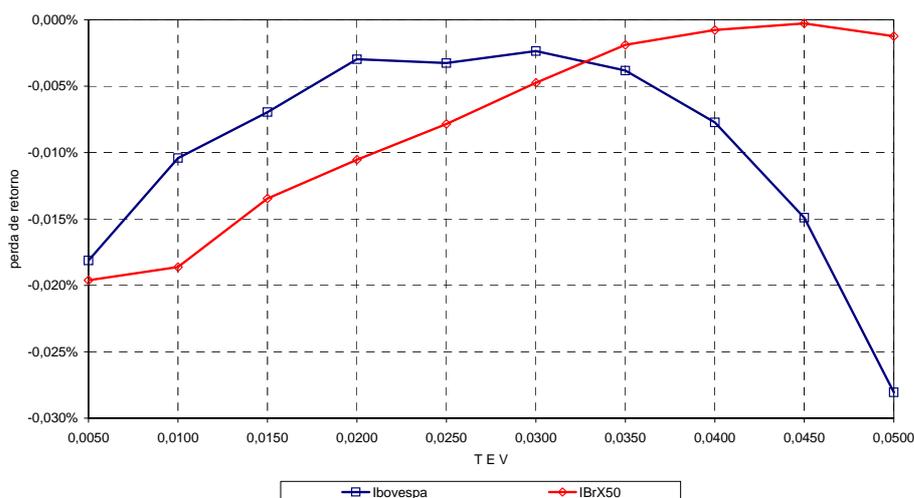


**Gráfico 2 - Risco e retorno por processo de otimização - benchmark: IBrX-50**



Os resultados apontam também que, quando se aumenta a restrição de TEV, a perda de retorno pelo acréscimo de restrição adicional à otimização com TEV tradicional também aumenta apenas para o Ibovespa, depois de diminuir até o TEV 0,02. Conforme registrado por Jorion (2003), esperava-se um aumento, o inverso do que ocorreu com o IBrX-50 (Gráfico 3). Essa constatação sugere, de acordo com Jorion (2003), onde quanto menos eficiente o índice melhor seria a restrição adicional, que o Índice Bovespa seria o índice de mercado mais eficiente entre os estudados.

**Gráfico 3 - Perda de retorno com a inclusão da restrição na variância total da carteira**



## 6. Considerações Finais

O ganho de eficiência ao se otimizar o retorno esperado com restrição na variância total da carteira foi observado nos dois índices analisados, porém a partir de um determinado TEV. Devemos observar que a amostra de três ações é pequena em relação ao número de ações no índice original (55 no Ibovespa e 50 no IBrX-50). Além disso, com a quantidade da amostra não se pode garantir uma diversificação eficiente. Esse ponto pode ser mais aprofundado em pesquisas posteriores.

Outro ponto a se destacar é o fato de que o ganho de eficiência esperado não se observa quando o *tracking error* objetivo é baixo. A dimensão do TEV pode ser um outro fator que influencie o ganho de eficiência, a ser avaliado em estudos futuros. Pode-se também ampliar os testes para outros índices de ações, como Índice Valor Bovespa - 2ª Linha (IVBX-2), e para índices multimercados.

O presente estudo mostra, para o período analisado, que, ao se utilizar o TEV como fator de avaliação de gestão, há evidências do ganho de eficiência com a inclusão da restrição na variância total da carteira na maximização do retorno em função do TEV objetivo. Além dos estudos posteriores sugeridos, outros parâmetros podem ser revistos, principalmente a definição da janela de preços históricos, o fator de decaimento do EWMA e até mesmo a metodologia de estimação dos retornos e da matriz de covariância.

Cumprе ressaltar que a minimização do TEV sem se atentar para o comportamento da variância total da carteira, conforme apontado por Jorion (2003), leva o administrador a decisões menos eficientes no plano risco-retorno e há evidências de que tal fato ocorre também no mercado brasileiro, como demonstrado no presente estudo.

## Referências Bibliográficas

BOVESPA - Bolsa de Valores de São Paulo. *Ibovespa*.

Disponível em <<http://www.bovespa.com.br>>. Acesso em: 17/05/2005.

BOVESPA - Bolsa de Valores de São Paulo. *IBrX-50*.

Disponível em <<http://www.bovespa.com.br>>. Acesso em: 17/05/2005.

JORION, P. "Portfolio Optimization in Practice". *Financial Analysts Journal*, v. 48, nº 1, Jan./Feb. 2002, pp. 27-38.

JORION, P. "Portfolio Optimization with Tracking-Error Constraints". *Financial Analysts Journal*, Sept/ Oct. 2003, pp. 70-82.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, v. 7, Mar. 1952, pp.77-91.

MARKOWITZ, H. M. *Portfolio Selection: efficient diversification of investments*. New York: J.Wiley, 1959.

RISK METRICS. *RiskMetrics - Technical Document*. 4<sup>th</sup> ed. New York: Morgan Guaranty Trust Company & Reuters Ltd, 1996. Disponível em: <<http://www.jpmorgan.com/RiskManagement/RiskMetrics/RiskMetrics.html>> Acesso em: 3/3/97.

ROLL, R. "A Mean-Variance Analysis of Tracking Error". *Journal of Portfolio Management*, v. 18, n° 4, Summer 1992, pp. 13-22.